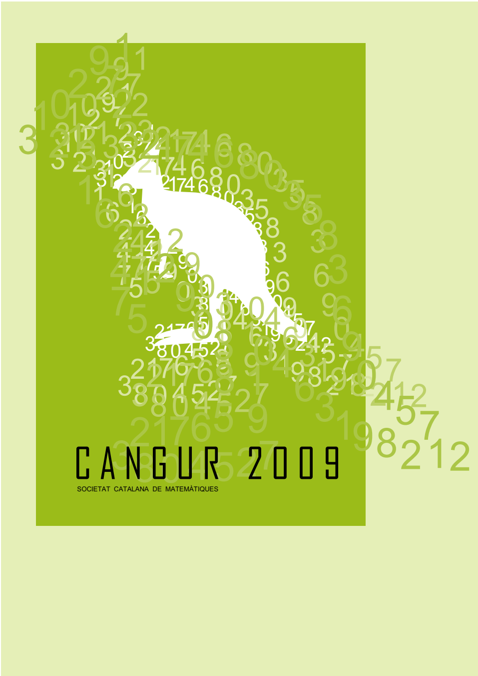
Cangur 2009

i altres activitats de la SCM



Cangur 2009
i altres activitats de la SCM

En aquesta publicació es presenten els enunciats, les relacions de participants més destacats i les solucions comentades de les les activitats de resolució de problemes que la SCM ha convocat durant el curs 2008-2009: la **XLV Olimpíada Matemàtica** (fase prèvia telemàtica i fase catalana), els **Problemes a l'esprint** (per a Primària i Secundària) i el **Cangur 2009**.

Cangur 2009 i altres activitats de la SCM
Publicació de la Societat Catalana de Matemàtiques,
filial de l'Institut d'Estudis Catalans
http://scm.iec.cat *http://www.cangur.org*

ISBN: 978-84-92583-50-8
Dipòsit Legal: B. 25080-2009

Índex

Presentació

Els cangurs han anat prenent embranzida. El que va començar com una experiència a Austràlia als mig vuitantes va ser heretat per França i uns quants països més al 1991 sota el nom de *Kangourou sans Frontières*, i s'hi han anat afegint països fins arribar a ser-ne 41 enguany. Els països catalans s'hi van afegir el 1996 i ara hi tenen representació nacional pròpia sota l'aixopluc de la Societat Catalana de Matemàtiques.

L'èxit de l'empresa ha sobrepassat totes les expectatives. Enguany, a les proves, que aquí, en confiança, anomenem **el Cangur**, hi han participat 22.000 estudiants i 600 centres d'ensenyament. Ja comença a ser difícil enllestir tota aquesta organització sense disfuncions, i només gràcies a l'interès i dedicació dels que ho porten es completen les etapes anuals: proposta de problemes a l'organització plurinacional, traducció a la nostra llengua de la proposta acordada en la reunió internacional, preparació del material, organització dels centres on es faran les proves, preparació de diplomes i premis, etc.

I l'empresa ha tingut èxit, i no només al països Catalans, perquè les proves, amb els seus tipus de problemes, que demanen enginy a més de coneixement, han enganxat. Han enganxat l'interès de professors i alumnes, i també dels que els proposen i els preparen. De fet jo diria que els problemes que es proposen han anat adquirint una certa personalitat: la personalitat de problemes del Cangur. I és una personalitat simpàtica. Demana més de l'idea feliç que no pas d'un treball pesat. Les proves Cangur han enganxat i, sense cap dubte, poden ajudar el nostre jovent a interessar-se per la matemàtica i els seus companys de viatge: la ciència i la tecnologia.

En aquesta publicació volem donar a conèixer els problemes que s'han proposat enguany per tal que siguin una font d'entreteniment i de repte a l'esperit. I també afiançadors dels coneixements matemàtics. Direm també quin és el país que ha proposat cada problema: és una mostra de la universalitat de l'esforç sense fronteres i de la col·laboració amb la millor de les disposicions; un exemple no massa abundant en els nostres temps, però sí habitual en l'entorn del Cangur. Fa uns anys la SCM va demanar la participació del professorat per a l'edició dels enunciats i les solucions de totes les edicions del Cangur. El material que vam rebre és excel·lent però diverses raons han fet que encara no hagi cristal·litzat aquella proposta. Ara bé, enguany sí que ens hem decidit i esperem que aquest llibre que teniu a les mans tingui ben aviat continuïtat editorial.

També aprofitem la publicació per a donar a conèixer altres activitats d'estímul del interès i del coneixement de les matemàtiques que organitza la nostra societat, l'**Olimpíada** i els **Problemes a l'esprint**. La Societat Catalana de Matemàtiques agraeix, amb molt entusiasme, l'esforç i la dedicació dels que fan i han fet possible l'èxit d'aquestes activitats.

Carles Perelló Valls
President de la SCM

XLV Olimpíada Matemàtica

Fase prèvia a Catalunya. Novembre 2008

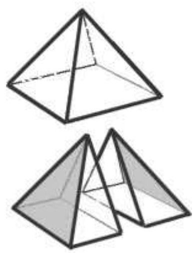
Problemes de 3 punts

1. Ara, a l'any 2008, tinc una edat de m anys. Suposant que fos immortal, quin any hauria multiplicat per k la meva edat?

A) $2008 \cdot k$
B) $k \cdot m \cdot 2008$
C) $2008 + k \cdot m$
D) $2008 + (k - 1) \cdot m$
E) $(2008 - m) \cdot k$

2. En un test es plantegen n qüestions. La puntuació de cada pregunta és de p punts (si és correcta), 0 punts (en blanc) o bé -1 punt (errònia). Quin és el mínim nombre de participants que permetrà assegurar a priori que, si més no, dos participants quedaran empatats amb la mateixa puntuació?

3. Una piràmide quadrangular regular es talla en dues peces iguals per un pla perpendicular a dos dels costats de la base en el seu punt mitjà. Aquestes dues peces s'enganxen tot fent coincidir els triangles que s'han acolorit en la figura. Quantes cares i quantes arestes té el cos que s'obté d'aquesta manera?



A) 6 cares, 9 arestes
B) 6 cares, 11 arestes
C) 7 cares, 13 arestes
D) 8 cares, 11 arestes
E) 8 cares, 13 arestes

Problemes de 4 punts

4. L'equació $(((x-a)^2-M)^2-2008)^2=0$ té exactament tres solucions reals diferents per a un cert valor de M. Quant val, en aquest cas, la suma d'aquestes tres solucions?

5. L'àrea del cercle inscrit a un hexàgon regular és $\sqrt{3}\cdot\pi\cdot N^2$ cm ^{2}. Quants cm ^{2} fa l'àrea de l'hexàgon?

6. Hem agafat quatre nombres naturals diferents i els hem sumat per parelles. Les sumes obtingudes són 78, 80, 83, 84, 87, 89. Quin és el nombre més petit dels quatre?

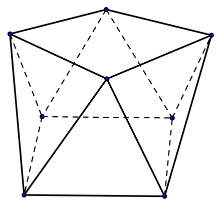
Problemes de 5 punts

7. Si tirem una moneda enlaire q vegades successivament, quina és la probabilitat de treure com a mínim c cares seguides on $c \geq \frac{q}{2}$?

8. El polinomi Ax^3+Bx^2+Cx+D té tres arrels reals a, b, c. Quin és el valor exacte de $(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1)$?

9. Les fraccions següents $\frac{1}{1844}, \frac{2}{1843}, \frac{3}{1842}, ..., \frac{1843}{2}, \frac{1844}{1}$ tenen la propietat que són totes les que es poden escriure amb el numerador i el denominador positius i que sumen 1845. Quantes d'aquestes fraccions són fraccions pròpies i irreductibles?

10. La imatge mostra un políedre que té dues bases que són quadrats iguals i cada vèrtex d'una base s'uneix a dos vèrtexs de l'altra i d'aquesta manera es formen cares laterals que són triangles isòsceles. Si la longitud dels costats dels quadrats de les bases és b i la distància en perpendicular entre les bases és h, determineu el volum del políedre.



XLV Olimpíada Matemàtica

Fase prèvia a Catalunya. Els resultats

Per impulsar la participació en l'Olimpíada catalana, els dies 14 i 15 de novembre de 2008 es van proposar per via telemàtica, els 10 problemes anteriors.

Hi va haver més de 100 participants i, després d'analitzar les respostes rebudes, que atorgaven un màxim de 41 punts, i les explicacions detallades dels problemes 6 i 10, que podien atorgar un màxim de 9 punts, el tribunal qualificador va acordar declarar ex aequo amb 50 punts les 6 persones que s'indiquen seguidament (seguint l'ordre alfabètic dels primers cognoms):

- Guillem Alsina Oriol (1r BTX, IES Jaume Callís, Vic)
- Xavier Fernández-Real Girona (1r BTX, IES Jaume Vicens Vives, Girona)
- Arthur François (2n BTX, Lycée Français, Barcelona)
- Ivan Geffner Fuenmayor (2n BTX, IES Maragall, Barcelona)
- Bru Martinell Chicano (1r BTX, IES Jaume Vicens Vives, Girona)
- Gerard Neras Lozano (1r BTX, IES Jaume Vicens Vives, Girona)

XLV Olimpíada Matemàtica

Fase prèvia a Catalunya. Solucions

Els problemes es van plantejar amb valors numèrics aleatoris. En aquesta publicació se'n presenta, quan és possible, una versió general.

Problemes de 3 punts

1. $2008 + (k-1) \cdot m$.

Hauré multiplicat per k la meva edat quan tingui $k \cdot m$ anys. Han de passar des d'ara $k \cdot m - m = k \cdot (m-1)$ anys i, per tant, serà l'any $2008 + k \cdot (m-1)$.

2. $\dfrac{2pn + 2n - p^2 + p + 4}{2}$.

La màxima puntuació és $n \cdot p$ punts i la mínima $-n$ punts, cosa que dóna un interval de $(p+1) \cdot n + 1$ puntuacions. És clar que el 0 i totes les puntuacions negatives poden ser observades, però no totes les puntuacions positives són factibles. Veurem quines són les que no es poden aconseguir.

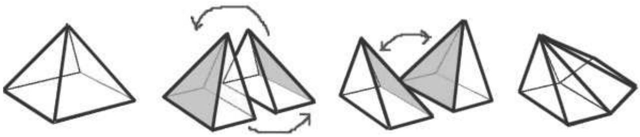
Si es falla o es deixa en blanc una pregunta s'obtenen $(n-1) \cdot p$ o $(n-1) \cdot p - 1$ punts (*). Veiem que entre la màxima puntuació $n \cdot p$ i aquestes hi ha $p - 1$ puntuacions que no es poden assolir. Si mirem les puntuacions quan s'encerten totes les preguntes excepte dues són segons els casos $(n-2) \cdot p$, $(n-2) \cdot p - 1$ i $(n-2) \cdot p - 2$ (**) i podem veure que entre les puntuacions (*) i les (**) hi ha $p - 2$ puntuacions no assolibles.

Després de les (**) fins a arribar a les que corresponen a 3 preguntes fallades (si p és prou gran) hi ha $p - 3$ puntuacions no factibles.

I així successivament veiem que el nombre de puntuacions diferents que no es poden assolir és $(p-1) + (p-2) + (p-3) + \ldots + 2 + 1 = \dfrac{p \cdot (p-1)}{2}$. Així podem saber el nombre de puntuacions diferents que es poden aconseguir i caldrà sumar-li 1 per tenir el nombre mínim de participants que permet assegurar que com a mínim dos empaten.

3. 8 cares, 13 arestes.

La figura visualitza l'enunciat.



Cada part de les dues en què es divideix la piràmide té 5 cares i 8 arestes. Quan es juxtaposen dues cares, una de cada part, aquestes dues cares "desapareixen" i per tant queden $5+5-2=8$ cares; alhora es superposen tres arestes d'una part amb tres arestes de l'altra que esdevindran tres arestes de la nova figura que, doncs, tindrà $8+8-3=13$ arestes.
Com que l'angle que formen les dues cares rectangulars amb les cares que s'enganxen no és un angle recte, es dedueix que les dues cares rectangulars no quedaran en el mateix pla en la figura que s'estudia. Semblantment es raona amb les cares laterals i amb el fet que cap parella d'arestes no queden alineades.

Problemes de 4 punts

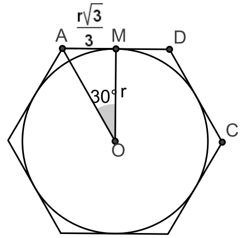
4. $3a$.

$(((x-a)^2-M)^2-2008)^2=0$ equival a $((x-a)^2-M)^2-2008=0$.
Ha de ser, doncs, $((x-a)^2-M)^2=2008$ cosa que ens porta a $(x-a)^2-M=\pm\sqrt{2008}$ i d'aquí a $(x-a)^2=M\pm\sqrt{2008}$ i, finalment, $x=a\pm\sqrt{M\pm\sqrt{2008}}$. Només podrem trobar exactament tres solucions si $M-\sqrt{2008}=0$ i aleshores les tres solucions són: $x_1=a+\sqrt{M+\sqrt{2008}}$, $x_2=a-\sqrt{M+\sqrt{2008}}$ i $x_3=a$ i la suma demanada és $3a$.

En alguns models l'equació proposada era $(((x-a)^2-2008)^2-M)^2=0$. *La solució també és* $3a$.

5. $6N^2$.

Si indiquem com r el radi del cercle, de l'enunciat deduïm que $r^2=\sqrt{3}\cdot N^2$. L'hexàgon es pot descompondre en 12 triangles rectangles com el que s'ha dibuixat del qual podem calcular l'altre catet mitjançant la $\tan 30°$. Les àrees d'aquests triangles sumen $2\cdot\sqrt{3}\cdot r^2$ i així arribem de seguida a la solució.



6. 37.

Si indiquem $a < b < c < d$ els quatre nombres podem deduir que $a+b < a+c$ són les dues sumes més petites. Semblantment $b+d < c+d$ són les dues sumes més grans. Entre $a+c$ i $b+d$ hi ha les dues altres sumes $a+d$ i $b+c$ però *a priori* no en sabem l'ordre. En l'exemple proposat serà $a+b = 78$, $a+c = 80$, $,b+d = 87$, $c+d = 89$ i $\{a+d, \ b+c\} = \{83, \ 84\}$. Posem $S = a+b+c+d$. Tenim que la suma dels 6 nombres donats a l'enunciat és $78+80+83+84+87+89 = 501 = 3S$. Aleshores podem provar si $a+d = 84$; seria $a+b+a+c+a+d = 78+80+84 = 2a+S$, cosa que ens porta a un valor fraccionari per a a, que ha de ser un nombre enter. En canvi si fem el mateix amb la hipòtesi $a+d = 83$ arribem a $a = 37$.

Aquest problema no quedaria sempre unívocament determinat en general, amb sumes $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$.

Problemes de 5 punts

7. $(2+q-c) \cdot (\frac{1}{2})^{c+1}$.

Si **C** representa treure una successió de c cares seguides, **+** treure una creu i • treure indistintament cara o creu, els resultats que ens interessen són els que segueixen els esquemes **C•••...•**, **+C••...•**, **•+C•...•**, ..., **••...•+C**. La condició $c \geq \dfrac{q}{2}$ permet assegurar que no hi ha cap possible resultat repetit en un esquema o un altre. Les probabilitats respectives són $(\frac{1}{2})^c$ per al primer esquema i $(\frac{1}{2})^{c+1}$ per als altres $q-c$ esquemes. La probabilitat total serà $(\frac{1}{2})^c + (q-c) \cdot (\frac{1}{2})^{c+1}$ que ens dóna el resultat enunciat.

8. $\dfrac{A-B+C-D}{A}$.

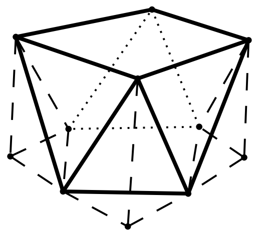
Podem veure que $(a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1) = abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1$. Si apliquem les fórmules de Cardano relatives a les arrels a, b, c del polinomi $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ tenim que $abc = -\dfrac{D}{A}$, $ab+bc+ca = \dfrac{C}{A}$ i $a+b+c = -\dfrac{B}{A}$, d'on resulta que $(a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1) = \dfrac{(A-B+C-D)}{A}$.

9. 480.

Tenim $1845 = 3^2 \cdot 5 \cdot 41$. Com que la fracció $\dfrac{n}{1845-n}$ ha de ser pròpia només cal que estudiem $n < 922$. Per altra banda si n i $1845-n$ tenen un factor comú, aquest factor comú ha de ser un divisor de 1845. Hem de comptar, doncs, quants nombres enters positius més petits que 922 són múltiples de 3, de 5 o de 41 (o no exclusiva). Els múltiples de 3 (que ja inclouen els de 3^2) són 307 (la part entera de $\frac{922}{3}$); els de 5, 184; els de 41, 22. Com que els hem comptat dues vegades, hem de descomptar els múltiples de $3 \cdot 5$, que són 61, els de $3 \cdot 41$, que són 7, i els de $5 \cdot 41$, que són 4. I, finalment, tornar a comptar el nombre $615 = 3 \cdot 5 \cdot 41$. La resposta és, doncs $992 - (307 + 184 + 22 - 61 - 7 - 4 + 1) = 480$.

10. $V = \dfrac{1}{3} \cdot b^2 \cdot h \cdot (2 + \sqrt{2})$.

Si pels vèrtexs de la cara inferior tracem paral·leles als costats de la cara superior, que formen angles de 45° amb els costats de la cara inferior, queda definit un quadrat de costat $b \cdot \sqrt{2}$. Si ara unim els vèrtexs d'aquest nou quadrat als vèrtexs de la cara superior es determinen quatre piràmides que tenen per base un triangle rectangle isòsceles. Aquestes quatre piràmides juntament amb la figura donada componen un tronc de piràmide quadrangular regular.



Com que es tracta d'una activitat telemàtica podem suposar que és coneguda la fórmula del volum d'un tronc de piràmide. En el nostre cas, en què els costats de les bases són $B = b \cdot \sqrt{2}$ i b i l'altura h el volum és

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (B^2 + B \cdot b + b^2)\frac{1}{3} \cdot h \cdot b^2 \cdot (3 + \sqrt{2})$$

Per calcular el volum demanat cal restar d'aquest la suma dels volums de les quatre piràmides triangulars que havíem afegit, cada una de les quals té volum $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{b^2}{4} \cdot h$, i així obtenim el resultat.

XLV Olimpíada Matemàtica

Fase catalana. Desembre 2008

Primera sessió

11. Dues circumferències són tangents interiorment en T. Sigui AB una corda de la circumferència exterior que és tangent a la circumferència interior en el punt P. Demostreu que $\overline{TP}$ biseca $\widehat{ATB}$.

12. Caracteritzeu tots els nombres enters positius N que **no** es poden escriure de cap de les dues maneres següents:

$$ab + a + b, \qquad cd + c - d,$$

amb a, b, c, d enters positius tals que $c \geq d$.

13. Sigui $\{a_n\}$ la successió en la qual a_n es defineix com el nombre natural més proper a $\sqrt{n}$. Quin és el valor de

$$S = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2008}}?$$

Segona sessió

14. Donat un triangle ABC, siguin m_a, m_b, m_c les seves mitjanes i sigui R el radi de la circumferència circumscrita. Demostreu que

$$\frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}$$

és un nombre enter positiu i determineu el seu valor.

---

15. És possible construir un políedre amb totes les cares formades per polígons de diferent nombre de costats?

---

16. En el conjunt $\{2, 2^2, \ldots, 2^n\}$ (n enter positiu), quina és la probabilitat que, en agafar un nombre a l'atzar del conjunt, la seva expressió decimal comenci amb un 1? Per a un valor gran de n, pots predir el comportament d'aquesta probabilitat?

XLV Olimpíada Matemàtica

Fase catalana. Els resultats

La fase catalana de la XLV Olimpíada Matemàtica, amb l'organització de la Societat Catalana de Matemàtiques es va celebrar simultàniament a Barcelona, Girona, Lleida i Tarragona els dies 12 i 13 de desembre de 2008.

El tribunal que va valorar els treballs dels nois i les noies que es van presentar, que estava presidit pel Dr. Pelegrí Viader (Universitat Pompeu Fabra) i en formaven part el Dr. Josep Pla (Universitat de Barcelona) i la professora Ester Silberstein (Aula, Escola Europea, de Barcelona), va prendre l'acord d'atorgar els premis següents:

Primers premis

- Iván Geffner Fuenmayor,
  IES Maragall (Barcelona), 2n de batxillerat
- Guillem Alsina Oriol,
  IES Jaume Callís (Vic), 1r de batxillerat
- Félix Miravé Carreño,
  Aula Escola Europea (Barcelona), 2n de batxillerat

Segons premis

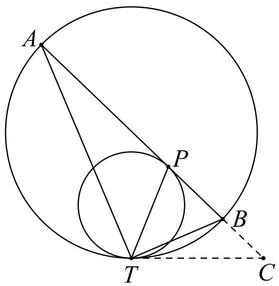
- Pere Planell Morell,
  Aula Escola Europea (Barcelona), 1r de batxillerat
- Jaume Pujantell Traserra,
  IES Pere Fontdevila (Gironella), 2n de batxillerat
- David Lorenzana Martínez,
  Escola Joan Pelegrí (Barcelona), 2n de batxillerat

Tercers premis

- Guillermo Izquierdo Bouldstridge,
  Aula Escola Europea (Barcelona), 1r de batxillerat
- Arthur François,
  Lycée Français (Barcelona), 2n de batxillerat
- Xavier Fernández-Real Girona,
  IES Jaume Vicens Vives (Girona), 1r de batxillerat

Fase catalana. Solucions

1. Primera solució.

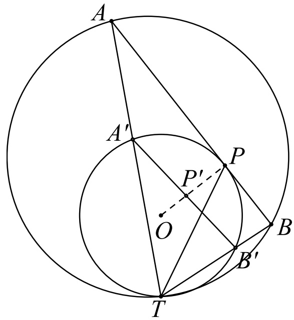


Si dibuixem la tangent comuna a les dues circumferències en el punt T i anomenem C el punt d'intersecció amb la recta AB, tenim que el triangle PTC és isòsceles atès que $\overline{CP} = \overline{CT}$ per ser tangents a la mateixa circumferència. Així, $\widehat{TPC} = \widehat{CTP} = \widehat{CTB} + \widehat{BTP}$.
Els angles $\widehat{CTB}$ i $\widehat{TAB}$ són iguals perquè comprenen el mateix arc a la circumferència exterior (el primer és semiinscrit i el segon inscrit). Ara, $\widehat{TPA}$ és suplementari de $\widehat{TPC}$ o sigui que, considerant el triangle ATP, tenim $\widehat{TPC} = \widehat{ATP} + \widehat{TAB}$. Hem obtingut, doncs, $\widehat{TPC}$ expressat de dues maneres:

$$\widehat{CTB} + \widehat{BTP} = \widehat{ATP} + \widehat{TAB}$$

o sigui que $\widehat{BTP} = \widehat{ATP}$ com s'havia de demostrar.

1. Segona solució.



L'homotècia de centre T que transforma la circumferència gran en la petita, transforma A en A' i B en B'. Les rectes AB i $A'B'$ són, per tant, paral·leles. Com que el radi OP és perpendicular a la tangent AB, també és perpendicular a $A'B'$. El punt P' ha de ser el punt mitjà de $A'B'$ i la recta OP' és la mediatriu del triangle $TA'B'$ corresponent al costat $A'B'$. Els arcs $A'P$ i PB' són iguals i per tant TP és la bisectriu de l'angle $\widehat{A'TB'}$, com calia demostrar.

2. Considerem un nombre enter positiu qualsevol, N. Si es pot posar $N = ab + a + b$ serà $N = a(b+1) + b = (a+1)(b+1) - 1$. En conseqüència, $N+1 = (a+1)\cdot(b+1)$ és un nombre compost. Si fos $N = cd + c - d$ tindríem $N = c(d+1) - d = (c-1)(d+1) + 1$. En conseqüència, $N-1 = (c-1)\cdot(d+1)$ és un nombre compost, llevat dels casos $c = 2, d = 1$ i $c = 2, d = 2$. El cas $c = 2, d = 1$ correspondria a $N = 3$ pel qual $N + 1 = 4$ és compost i els cas $c = 2, d = 2$ correspondria a $N = 4$ que és la única excepció.
En conseqüència, els enters positius N que no són ni d'una manera ni de l'altra són aquells que compleixen que $N + 1$ i $N - 1$ són primers amb l'excepció del 4. Això caracteritza els nombres que ens demanen: són els que estan situats entre dos primers bessons a excepció del 4. És a dir: 6, 12, 18, 30, 42, 60, etc.

---

3. Si fem una mica d'observació, tindrem:

$$\begin{array}{l} n: 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16, 17, 18, 19, 20, 21, ... \\ a_n: 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5, ... \end{array}$$

Ens adonem que a la segona fila, l'1 es repeteix dues vegades, el 2 es repeteix 4 vegades, el 3 es repeteix 6 vegades, el 4 es repeteix 8 vegades. A més, si ens fixem en els quadrats perfectes de la primera fila, veiem que on tenim k^2, el corresponent a_k és, òbviament, k i aquest valor es manté entre els valors $k^2 - (k-1)$ i $k^2 + k$. Per tant, podem conjecturar que $a_n = k$ si, i només si, $n = k^2 - k + 1, k^2 - k + 2, \ldots, k^2 + k - 1, k^2 + k$. En total, $a_n = k$ per $2k$ valors de n. Demostrem aquesta conjectura.

Si $a_n = k$, això equival a que $k - \frac{1}{2} < \sqrt{n} < k + \frac{1}{2}$. Les desigualtats són estrictes perquè $\sqrt{n}$ no pot prendre mai el valor $k + 1/2$ amb k enter. Tenim, doncs, elevant al quadrat, que $k^2 - k + \frac{1}{4} < n < k^2 + k + \frac{1}{4}$. Aquestes desigualtats, òbviament porten a que $n = k^2 - k + 1, k^2 - k + 2, \ldots, k^2 + k - 1, k^2 + k$. En conseqüència, un valor k s'aconsegueix $2k$ vegades exactament pels valors de n compresos entre $k^2 - k + 1$ i $k^2 + k$. Això significa que la fracció $1/k$ apareix $2k$ vegades. Mirem ara com queda 2008 en relació a la seva posició en una llista $k^2 - k + 1, k^2 - k + 2, \ldots, k^2 + k - 1, k^2 + k$. Concretament, com que $\sqrt{2008} = 44.8\ldots$, el valor de a_{2008} serà 45 i serà dins de la llista $45^2 - 45 + 1 = 1981, \ldots, 45^2 + 45 = 2070$. Aquest valor s'haurà assolit exactament per $a_{1981}, a_{1982}, \ldots, a_{2008}$. Exactament 28 vegades.
Estem en condicions de fer la suma total:

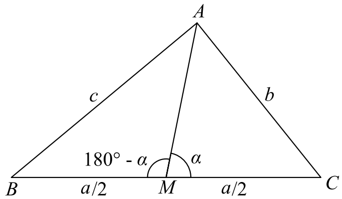
$$S = 2 \cdot \frac{1}{1} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{3} + \cdots + 88 \cdot \frac{1}{44} + 38 \cdot \frac{1}{45} = 44 \cdot 2 + \frac{28}{45} = \frac{3988}{45}.$$

---

4. El teorema del sinus aplicat al triangle ABC ens dóna

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

i d'aquí surt que el denominador de l'expressió de l'enunciat és $\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)$. Calculem ara les mitjanes.



Considerem la mitjana m_a que uneix el vèrtex A amb el punt M mitjà del segment BC. El teorema del cosinus aplicat al triangle AMB ens dóna $c^2 = m_a^2 + a^2/4 - a\,m_a\cos(180° - \alpha) = m_a^2 + a^2/4 + a\,m_a\cos\alpha$ i semblantment en el triangle AMC tenim $b^2 = m_a^2 + a^2/4 - a\,m_a\cos\alpha$. Sumant les dues expressions queda $b^2 + c^2 = a^2/2 + 2m_a^2$.

Fàcilment obtenim $m_a^2 = (2c^2 + 2b^2 - a^2)/4$ i per tant

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\big(a^2 + b^2 + c^2\big).$$

El nombre que ens demanen és 3.

5. Primera solució.

Suposem que la cara amb el nombre més gran de costats en té n. Les cares poden ser de 3, 4, 5, …, $n-1$, n costats. Com a màxim hi ha $n-2$ cares. En cada una de les n arestes de la cara que en té més hi hem de poder adossar una cara, però no tenim prou cares ja que , com a màxim, ens en queden $n-3$.

Per tant és impossible construir un políedre amb totes les cares formades per polígons de diferent nombre de costats.

5. Segona solució.

Designem per c, v i a el nombre de cares, vèrtexs i arestes del políedre. Per la fórmula d'Euler sabem que $c + v = a + 2$, i com que a cada vèrtex hi concorren, com a mínim, tres arestes, tenim també $3v \leq 2a$. D'aquestes dues relacions surt fàcilment $6 \leq 3c - a$ o bé $12 \leq 6c - 2a$.

Designem per c_i el nombre de cares que tenen i costats. Aleshores es compleix $c = c_3 + c_4 + \cdots + c_n$ i $2a = 3c_3 + 4c_4 + \cdots + nc_n$.

Si substituïm a la fórmula $12 \leq 6c - 2a$ els valors de c i $2a$ obtenim

$$\begin{aligned}12 &\leq 6\big(c_3 + c_4 + \cdots + c_n\big) - \big(3c_3 + 4c_4 + \cdots + nc_n\big) = \\ &= 3c_3 + 2c_4 + c_5 - \big(c_7 + 2c_8 + \cdots + (n-6)c_n\big) \\ &\leq 3c_3 + 2c_4 + c_5.\end{aligned}$$

Si fos $c_3 \leq 1$, $c_4 \leq 1$ i $c_5 \leq 1$ ens quedaria $12 \leq 6$, absurd. En conseqüència, entre les cares d'un políedre cal que es repeteixin efectivament, o bé triangles, o bé quadrilàters, o bé pentàgons.

---

6. Primera solució.

Demostrarem per inducció que a cada ordre decimal hi ha almenys una potència de 2 (entenem per ordre decimal cada interval entre dues potències de 10 consecutives).

En efecte, a l'ordre $[1, 10)$ n'hi ha 3: 2, 4 i 8. Suposem que a l'ordre k, $[10^{k-1}, 10^k)$ hi ha alguna potència de 2. Aleshores, si aquesta potència no arriba a la meitat de l'ordre, la potència següent queda dins del mateix ordre ($499\ldots99 \times 2 = 999\ldots98$). Com que dins d'un ordre decimal no hi pot haver infinites potències de 2, alguna d'elles passarà de la meitat i la potència següent serà de l'ordre següent $k+1$, $[10^k, 10^{k+1})$.

Aquesta potència de dos que acabem de trobar a la demostració anterior comença amb un 1 ($999\ldots99 \times 2 = 1999\ldots98$). A més és l'única potència de 2 dins de l'ordre decimal que comença amb un 1. En conclusió a cada ordre decimal hi ha una *única* potència de 2 que comença amb un 1. A la successió $\{2, 2^2, \ldots, 2^n\}$ hi ha tantes potències de 2 que comencen amb un 1 com ordres decimals abasti, és a dir, com el nombre de xifres de 2^n que és $\big[\log 2^n\big] + 1 = \big[n \log 2\big] + 1$.

Si tenim present que a l'odre decimal 1 no n'hi ha cap ja que $2^0 = 1$ no és del conjunt, la probabilitat buscada és $p_n = \dfrac{\big[n\log 2\big]}{n}$.

Com que $\big[n \log 2\big] = n\log 2 - \{n \log 2\}$ (on $\{\alpha\}$ indica la *part fraccionària* del nombre real α, $0 < \{\alpha\} < 1$), resulta $p_n = \log 2 - \dfrac{\{n\log 2\}}{n}$ que tendeix a $\log 2$ quan n es fa gran.

---

6. Segona solució.

Una primera observació que hem de fer és que per cada valor enter positiu de k existeix una única potència de 2 de k xifres que comença per 1. Per $k = 1$ és evident: $2^0 = 1$. Per $k > 1$, tot rau a estudiar la doble desigualtat

$$10^{k-1} < 2^r < 2{\cdot}10^{k-1}$$

i veure que té solució única en r. Traient logaritmes decimals,

$$k - 1 < r{\cdot} \log_{10}(2) < k - 1 + \log_{10}(2).$$

Ara, dividint tot per $\log_{10}(2)$:

$$\frac{k-1}{\log_{10}(2)} < r < \frac{k-1}{\log_{10}(2)} + 1.$$

Com que $\log_{10}(2)$ no és un nombre racional, a l'interval

$$\left(\frac{k-1}{\log_{10}(2)}, \frac{k-1}{\log_{10}(2)} + 1\right)$$

segur que hi ha un únic nombre enter positiu r.

Vist això, comptem quantes potències de 2 del conjunt $\{2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n\}$ comencen per 1. Amb la observació anterior, deduïm que el nostre recompte coincideix amb el nombre de dígits decimals de 2^n. És a dir, $[n \cdot \log_{10}(2)]$ (la notació $[\cdot]$ denota la part entera d'un nombre real).

La probabilitat demanada és

$$P_n = \frac{[n \cdot \log_{10}(2)]}{n}.$$

Com que podem escriure $[n\cdot\log_{10}(2)] = n\cdot\log_{10}(2) - \alpha$, on $0 < \alpha < 1$, tenim que

$$P_n = \frac{[n \cdot \log_{10}(2)]}{n} = \frac{n \cdot \log_{10}(2) - \alpha}{n} = \log_{10}(2) - \frac{\alpha}{n}.$$

Si n és gran, com que $0 < \alpha < 1$, és clar que la fracció α/n és molt petita. La probabilitat s'acostarà a $\log_{10}(2) = 0.301030\ldots$.

Problemes a l'esprint

Segon cicle d'ESO i Batxillerat. Gener 2009

Problemes de la branca d'olivera

1. Si S és el 25 % de 60, 60 és el 80 % de U, 80 és el M % de 25 i A és 2009, calcula el valor de $S + U + M + A$

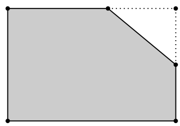
La solució del problema 1 s'ha de passar al problema 7 com a nombre R.

---

2. Quina és la xifra de les desenes de 11^{2009}?

---

3. Hem retallat un triangle en un vèrtex d'un rectangle com s'indica a la figura (que, com és habitual, no està pas feta a escala). El pentàgon que hem obtingut té com a longituds dels costats (potser no en aquest ordre) 8, 10, 13, 15 i 20 unitats. Quina és l'àrea del pentàgon, expressada en unitats quadrades?



A) 252,5 u^2 B) 270 u^2 C) 282,5 u^2 D) 275,5 u^2 E) 260 u^2

---

4. A l'Antoni li han explicat que $\dfrac{4}{5} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{10}$ i ell ha interpretat que el procediment per restar fraccions consisteix a fer això:

- *es resten els numeradors i es multipliquen els denominadors.*

Si la professora li posa a l'Antoni com a feina fer totes les restes $\dfrac{a}{7} - \dfrac{b}{5}$, on a i b són nombres enters positius d'una xifra amb $a > b$, quin serà el percentatge de respostes correctes que donarà l'Antoni si fa les restes amb el seu peculiar procediment?

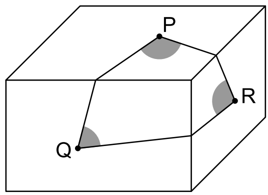
Per tal de trobar la resposta numèrica del problema 5 necessiteu un nombre V que us han de passar des del problema 6.

5. Tenim un ortoedre de fusta de volum V cm^3 que té les tres dimensions nombres enters més petits que 10, (és a dir que serà de a cm $\times$ b cm $\times$ c cm amb a, b, c enters, a, b, $c < 10$). La Berta ha pintat les cares exteriors i ha necessitat exactament un pot de pintura. Tot seguit amb una serra hem tallat repetidament el bloc de fusta fins que hem obtingut V cubets unitaris, de 1 cm $\times$ 1 cm $\times$ 1 cm. Si ara la Berta vol pintar totes les cares exteriors dels cubets (només les que no estaven pintades, és clar!), calculeu quants pots de pintura necessitarà, amb el benentès que els pots de pintura només els pot comprar sencers.

Heu de passar al darrer repte (problema 12) com a valor N la resposta numèrica d'aquest problema.

Problemes del colom de la pau

6. Una formiga viu a les cares d'un ortoedre. Sempre que s'ha de desplaçar d'un punt a un altre ho fa pel camí més curt i, com que sap geometria, realment encerta sempre el camí més curt per anar d'un punt d'una cara a un punt d'una altra cara. A la figura es mostra l'itinerari que ha seguit per anar des de P cap a Q, després de Q cap a R i finalment per tornar des de R fins a P. Quina és la suma dels tres angles assenyalats a la figura?



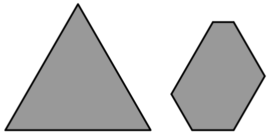
A) 180° B) 270° C) 360° D) 240° E) 225°

El nombre de graus de la resposta s'ha de passar al problema 5, on rep el nom de V.

Per al problema 7 es necessita un nombre R, que passa del problema 1.

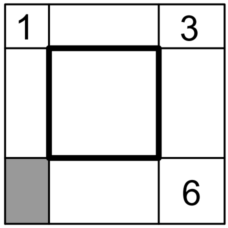
7. La mitjana d'un conjunt de R nombres és R. Afegim al conjunt 2009 nombres i aleshores resulta que la mitjana del conjunt dels $2009 + R$ nombres és $2009 + R$. Quina és la mitjana dels 2009 nombres que hem afegit?

8. Equips d'ESO. Construïm un hexàgon retallant un petit triangle equilàter de cada vèrtex d'un triangle equilàter gran. Els costats dels triangles equilàters que hem retallat tenen com a longituds 1, 2 i 3 unitats. La raó entre el perímetre del triangle equilàter original i el perímetre de l'hexàgon és $\frac{7}{5}$. Quina és la raó entre l'àrea del triangle equilàter original i l'àrea de l'hexàgon?



A) $\frac{7}{5}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{16}{9}$ E) $\frac{49}{25}$

8. Equips d'ESO i Batxillerat. Un quadrat s'ha partit en 9 regions mitjançant rectes paral·leles als costats. La regió assenyalada amb un traç més gruixut és un quadrat i les altres són rectangles. Coneixem les àrees de tres d'aquests rectangles, que estan indicades a la figura. Quin és el perímetre del rectangle acolorit?



A) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B) 2 C) $3\sqrt{3}$ D) 6 E) $\frac{11\sqrt{3}}{3}$

9. Equips d'ESO. Tirem dos daus, amb les cares marcades amb els números 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Quina és la probabilitat que amb les dues xifres que assenyalen els dos daus puguem escriure un nombre de dues xifres que sigui quadrat perfecte?

9. Equips d'ESO i BTX. Rafael Nadal i Roger Federer han de jugar un partit en una pista de terra batuda, al millor de tres sets, és a dir que el jugador que guanya dos sets ja ha guanyat el partit. S'estima que la probabilitat que té Rafael Nadal de guanyar cada set és 2/3. Quina és l'estimació que hem de fer de la probabilitat que té Rafael Nadal de guanyar el partit?

Per les dues versions del problema 9, si $\frac{d}{n}$ n'és la solució, expressada com una fracció irreductible, cal passar $S = d - n$ al problema 10.

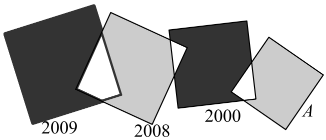
Reptes finals

Per resoldre aquest problema cal conèixer un nombre S que passa del problema 9. Tanmateix sense aquest valor ja es pot anar pensant el problema!

10. Es considera el conjunt de nombres enters de l'1 al 2009, $C = \{1, 2, 3, ..., 2008, 2009\}$. ¿Quina és la màxima quantitat de nombres diferents que podem escollir en el conjunt C de manera que no n'hi hagi cap parella amb la propietat que la seva suma sigui un múltiple de S?

El nombre solució del problema 10 passa al problema 11 com a nombre A.

11. Quatre quadrats, d'àrees respectives 2009, 2008, 2000 i A unitats d'àrea s'han encavalcat com mostra la figura i s'han pintat els polígons que han quedat determinats. Quin és el resultat de restar l'àrea de color gris fosc menys l'àrea de color gris clar?



Per acabar aquest problema es necessita un nombre N que ve del problema 5.

12. Un transportista de les terres de l'Ebre ha carregat un camió amb N tones ($1000N$ quilos) de melons de moro (també anomenats en algunes altres contrades melons d'Alger, o melons d'aigua, o síndries, o sindris o xíndries). S'estima que el 92% del pes dels melons de moro és aigua. Durant el transport fins al mercat feia molta calor i s'ha evaporat part de l'aigua de manera que aleshores es pot estimar que només el 90% del pes del carregament serà aigua. Amb quants quilos de melons de moro ha arribat el transportista a la seva destinació?

Problemes a l'esprint

Segon cicle d'ESO i Batxillerat. Gener 2009

Participació i centres destacats

En aquesta XV edició dels **Problemes a l'esprint** adreçada a equips d'alumnes de segon cicle d'ESO i batxillerat, celebrada el 29 de gener de 2009, van participar 54 centres de les Illes Balears, la Comunitat Valenciana i Catalunya. Després d'analitzar les respostes rebudes i de felicitar totes les xiques i xics, al·lotes i al·lots, sagals i sagales, nois i noies que van participar i al professorat que va col·laborar en l'activitat, es va acordar convidar tres centres a l'acte d'entrega de premis, un dels quals, com a mínim, fos dels que participava només amb alumnes de l'ESO.

Centres més destacats

- IES Pere Fontdevila (Gironella), 52 minuts,
  centre guanyador de l'activitat
- Aula Escola Europea (Barcelona), 53 minuts
- IES Sabadell (Sabadell),72 minuts,
  el millor centre només amb alumnes d'ESO

Altres centres que han encertat totes les respostes
(per ordre alfabètic del nom del municipi)

IES Miguel Hernández (Alcoi)
IES Arquitecte Manuel Raspall (Cardedeu)
IES Jaume Vicens Vives (Girona)
IES Santa Eugènia (Girona)
Col·legi Jardí (Granollers)
IES Manuel Blancafort (La Garriga)
IES El Pedró (L'Escala)
IES Samuel Gili i Gaya (Lleida)
IES Gregori Maians (Oliva)
IES Sant Just (Sant Just Desvern)
Cultura Pràctica (Terrassa)

Problemes a l'esprint

Segon cicle d'ESO i Batxillerat. Gener 2009

Les solucions

1. 2419.

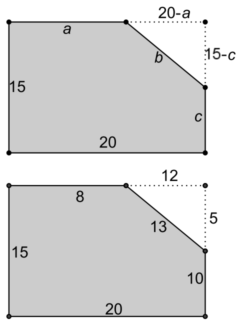
Si $S = \dfrac{25 \cdot 60}{100}$, $60 = \dfrac{80 \cdot U}{100}$, $80 = M \cdot \dfrac{25}{100}$ i $A = 2009$, es calcula i resulta $S + U + M + A = 2419$.

2. 9.

Es pot fer per multiplicacions reiterades per 11 (només cal escriure les dues últimes xifres de cada multiplicació parcial) i es veu que la xifra de les desenes de 11^i segueix la cadència 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2, 3 ,... i per això 11^{2009} acaba en 9. També es pot fer mitjançant la fórmula del Binomi de Newton. S'observa que $11^{2009} = (10+1)^{2009}$ i desenvolupant la potència resulta una suma de molts sumands que són múltiples de 100 més els dos últims, que són $2009 \cdot 10^1 \cdot 1^{2008} + 1^{2009}$. Aquesta suma acaba en 91.

3. B. 2709.

El costat més llarg del rectangle ha de ser el de 20. L'altre costat "no retallat" del rectangle ha de ser el de 15 perquè la suma de les longituds dels dos costats del rectangle ha de ser més gran que la suma dels altres tres costats del pentàgon. A partir d'aquí es poden estudiar totes les variacions possibles per assignar als costats que a la figura s'han indicat com a, b, c els valors 8, 10 i 13. S'ha de comprovar que en el triangle retallat, de costats $20-a, b, 15-c$ es compleixi el teorema de Pitàgores i es veu que l'única possibilitat és $a = 8$, $b = 13$, $c = 10$ i així resulta un triangle rectangle de catets 12 i 5 i hipotenusa 13. Després ja només cal calcular l'àrea del rectangle inicial $(20 \cdot 15 = 300)$ i restar-li l'àrea del triangle retallat $(12 \cdot \dfrac{5}{2} = 30)$ i es veu que l'àrea del pentàgon és 270.



4. 8,3 %.

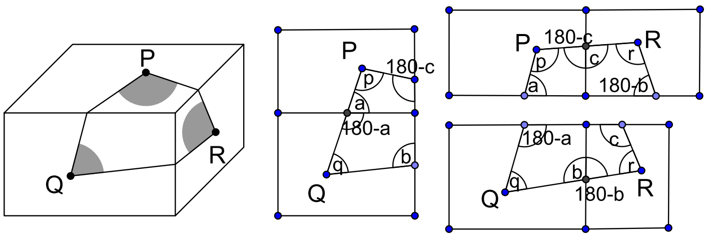
Si volem que $\frac{a}{7}-\frac{b}{5}=\frac{5a-7b}{35}=\frac{a-b}{35}$ on ja hem igualat la resposta correcta i la que obtindrà l'Antoni, veiem que s'ha de complir $5a-7b=a-b \Rightarrow 4a=6b \Rightarrow 2a=3b$. Com que ha de ser $10>a>b$ i a,b nombres enters, s'observa que les úniques possibilitats són $a=3, b=2$; $a=6, b=4$ i $a=9, b=6$. Com que per altra banda el nombre de parelles (a,b) que compleixen $10>a>b$ i a,b nombres enters és 36, el percentatge d'encerts serà de $100\cdot\frac{3}{36}=\frac{100}{12}$ que correspon al 8,3 %.

5. 6.

Del problema 6 passa $V=270$ cm^3. L'única manera de posar el 270 com a producte de tres nombres enters més petits que 10 és la següent: $270=5\cdot6\cdot9$. Vist això la superfície exterior inicial de l'ortoedre és $s=2\cdot(5\cdot6+5\cdot9+6\cdot9)$. La superfície exterior dels 270 cubets unitaris serà $270\cdot6$ de la qual quedarà per pintar $270\cdot6-s$. Com que per pintar s hem necessitat un pot de pintura hem de fer una divisió i veurem que necessitarem 5 pots i escaig, és a dir que n'haurem de comprar 6.

6. B. 270°.

Observem un esquema amb desplegaments de les cares de l'ortoedre.



Si analitzem els quadrilàters que es formen en les cares on hi ha els punts P, Q, R veurem que, amb els noms que s'han donat als angles en la figura anterior, es compleix

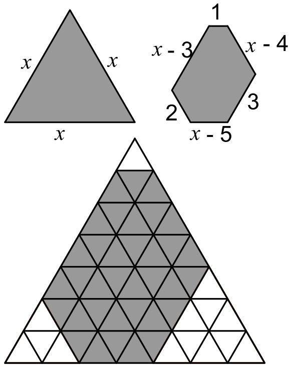
$$p+a+(180°-c)+90°=360°$$
$$q+b+(180°-a)+90°=360°$$
$$r+c+(180°-c)+90°=360°$$

Si sumem aquestes tres igualtats deduïm que $p+q+r=270°$.

7. 6847.

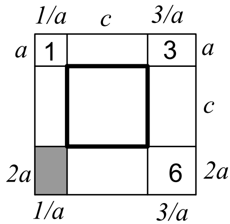
Del problema 1 passa el valor $R = 2419$. Si $2009 + 2419 = 4428$ nombres tenen de mitjana 4428 és que sumen 4428^2. Els 2419 nombres inicials, com que tenen de mitjana 2419 sumen 2419^2. Per tant els 2009 nombres que hem afegit sumen $s = 4428^2 - 2419^2$ i, doncs, tenen de mitjana $\dfrac{s}{2009} = 6847$.

8. Equips d'ESO. $\dfrac{7}{5}$.



Resultat curiós: la raó de les àrees entre les dues figures és igual a la raó entre els seus perímetres!
Si designem com x el costat del triangle inicial el seu perímetre és $3x$; com es mostra a la figura el perímetre de l'hexàgon serà $3x - 6$. Si imposem que la raó entre $3x$ i $3x - 6$ sigui $\dfrac{7}{5}$ resulta $x = 7$.
Tot i que la relació entre les àrees es pot trobar per càlcul, proposem una solució gràfica. Si es descompon el triangle inicial en 49 triangles equilàters de costat 1, això permet comprovar de seguida que la relació d'àrees és $\dfrac{7}{5}$.

8. Equips d'ESO i Batxillerat. $\dfrac{11\sqrt{3}}{3}$.



Si a representa un dels costats dels rectangles que tenen àrea coneguda podem obtenir els altres valors indicats a la figura. Si c és el costat del quadrat centrat i C el del quadrat inicial, serà

$$C = \frac{1}{a} + c + \frac{3}{a} = a + c + 2a$$

d'on se'n dedueix $\dfrac{4}{a} = 3a$ i d'aquí $a = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ i el perímetre buscat és igual a $2 \cdot \left(\dfrac{1}{a} + 2a\right) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

9. Equips d'ESO. $\dfrac{2}{9}$.

Si observem les 36 possibilitats (i, j) on i és, el que marca un dau i j el que marca l'altre, i pensem en els possibles quadrats perfectes que podrem escriure (16, 25, 36, 64) veurem que hi ha 8 casos favorables: (1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,6), (6,3), (6,4), (4,6). La probabilitat demanada és doncs $\dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9}$.

---

9. Equips d'ESO i BTX. 20/27..

Si pensem en els possibilitats que té un jugador per guanyar, que són: guanyar els dos primers sets, guanyar el primer i el tercer o bé guanyar el segon i el tercer tindrem que la probabilitat demanada, que guanyi en Rafael Nadal, és: $\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{20}{27}$.

---

10. 862.

Passa el valor S=7 del problema 9 i, per tant, hem d'estudiar quina és la màxima quantitat de nombres que podem escollir del conjunt

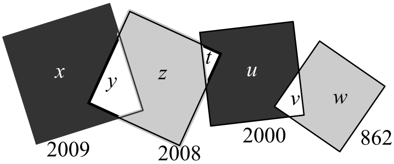
$$C = \{1, 2, 3, ..., 2008, 2009\}$$

de manera que entre els nombres seleccionats no n'hi hagi cap parella que sumi un múltiple de 7. Si classifiquem els nombres de C segons el residu que donen quan els dividim per 7, en tindrem 287 que donen residu 1, 287 que donen residu 2, ..., 287 que són múltiples de 7. Si posem un nombre de residu 1 en el subconjunt dels que escollim, no n'hi podem posar cap de residu 6 i recíprocament, però sí que podem posar-hi tots els d'una mateixa classe: en total 287. El mateix amb els de residu 2 i els de residu 5: en total 287, perquè cap d'aquests sumat amb els anteriors pot donar un múltiple de 7. I semblantment amb els de residu 3 i residu 4. Tenim 287 candidats més a pertànyer a S. I pel que fa als múltiples de 7? No en podrem escollir dos alhora però un únic múltiple de 7 sí que el podem triar, perquè no donarà com a suma un múltiple de 7 si el sumem amb un altre que no ho sigui. Així doncs podem posar triar $3 \cdot 287 + 1 = 862$.

---

11. 1139.

A partir del problema anterior se sap que $A = 862$. Tot i que també es pot donar una solució "explicativa", donem una solució algebraica. Amb les lletres de la figura següent



veiem que es compleixen les equacions $x+y = 2009, y+z+t = 2008, t+u+v = 2000, v+w = 862$ i aleshores, sumant la primera i la tercera equació obtenim $x+y+t+u+v = 4009$ i sumant la segona i la quarta, $y+z+t+v+w = 2870$, i si ara restem aquestes dues, $(x+u) - (z+w) = 4009 - 2870 = 1139$.

12. 4800 kg.

Del problema 5 passa el valor $N = 6$ tones, és a dir 6000 kg, dels quals el 92%, que són 5520 kg, és aigua i, doncs, 480 kg no són aigua. Aquests 480 kg seran, després del transport, el 10% del total del pes que arriba. Per tant el pes del carregament quan arriba a destinació és 4800 kg.

Problemes a l'esprint

Cicle superior de Primària. Febrer 2009

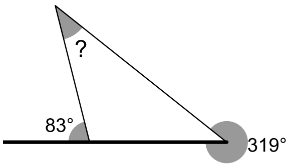
Problemes de la branca d'olivera

1. A la biblioteca de l'escola de l'Anna, en Bertomeu i la Cinta, en l'espai destinat als alumnes del cicle superior, tenen molts llibres. "*Al voltant de dos mil*", els ha dit la mestra i els proposa si encerten quants n'hi ha. L'Anna diu 2009, en Bertomeu 2001 i la Cinta 1982. La mestra els diu que s'han equivocat de 8, d'11 i de 19, però no en aquest ordre. Quants llibres hi ha a la biblioteca, a l'espai del cicle superior?

A) 2017 B) 2012 C) 1993 D) 1990 E) 2020

2. L'Enric té un rellotge digital que marca hores minuts i segons, sempre amb sis xifres. Per exemple, es veu **00:00:00** a mitjanit; **08:57:35** a l'hora que avui ha arribat a l'escola; **12:00:00** al migdia; **20:09:07** al moment que ahir va començar a sopar. Quantes vegades, al llarg de tot un dia, canvien alhora totes les xifres de la pantalla del rellotge digital de l'Enric?

3. A la figura es pot veure la mesura de dos angles, un de 83° i un altre de 319°. Quina és la mesura en graus de l'angle marcat amb un signe d'interrogació?

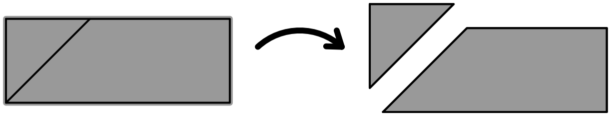


Atenció: La figura només és un esquema del que es demana; no està dibuixada amb precisió. No us demanem que mesureu sinó que raoneu.

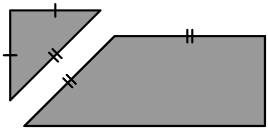
A) 38° B) 42° C) 46° D) 58° E) 62°

La solució d'aquest problema s'ha de passar com a dada al problema 9.

4. La Diana retalla un rectangle en dues peces, així:

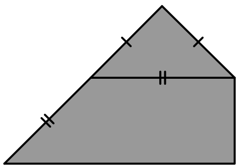


Ho ha pogut fer de manera que els costats que veieu marcats amb un traç són iguals entre ells, de la mateixa distància, i els que marquem amb dos traços, també.



La Diana ja sap que potser algunes d'aquestes distàncies són iguals a algunes de les que no estan marcades. Ara us demanem que esbrineu quants polígons diferents pot compondre la Diana amb les dues peces de manera que s'enganxin dos costats de la mateixa mida.

Tot seguit podeu veure una de les possibilitats que té la Diana de compondre un nou polígon tal com es demana, però, **atenció!** Vosaltres heu d'estudiar quantes són **totes les maneres**, incloent-hi el rectangle inicial i el polígon de l'exemple.



La solució d'aquest problema s'ha de passar com a dada al primer repte, el problema 8.

Problemes del colom de la pau

5. Potser podem dir que 2009 és un nombre com qualsevol altre. Però adoneu-vos que té la propietat que les dues xifres centrals són iguals i que les dels extrems sumen 11. Quants nombres de quatre xifres compleixen aquesta propietat ?

6. Un estudi geològic arriba a la conclusió que l'estalactita més gran d'una cova s'allarga 1 metre cada 1000 anys. Pensa quants mm s'allarga cada any i després estudia quina de les opcions de resposta que et proposem indica més aproximadament quant creix l'estalactita cada dia.

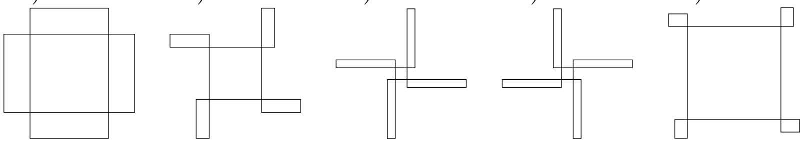
A) 0,0003 mm B) 0,003 mm C) 0,03 mm D) 0,3 mm E) 3 mm

7. Un robot mecànic està programat amb els comandaments següents:

(*) Avança 2 unitats
Gira a la dreta 90°
Avança 15 unitats
Gira a la dreta 90°
Avança 20 unitats
Gira a la dreta 90°
Torna a repetir des de (*)

Quin dels esquemes següents representa el camí que seguirà el robot si va obeint les instruccions sense parar?

A) B) C) D) E)

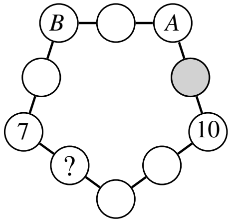


D'acord amb la resposta d'aquest problema cal passar un número al problema 8. Si és A, passa 1, si és B, 2; si és C, 3; si és D, 4; si és E, 5.

Reptes finals

Per poder resoldre completament el problema 8 cal saber els nombres que passen dels problemes 4 i 7.

8. En l'esquema pentagonal següent hem de situar-hi els nombres de l'1 al 10, cada nombre en un cercle diferent, de manera que cada grup de tres nombres situats en línia han de sumar exactament el mateix. Al cercle A hi heu de posar el nombre que passa del problema 4 i al cercle B hi heu de posar el nombre que passa del problema 7.

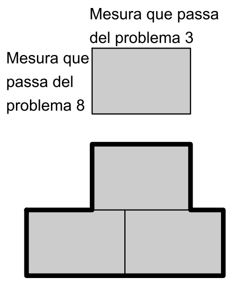


Penseu primer de tot quin nombre pot anar al cercle marcat de color gris i deduïu quant sumaran cada tres cercles en línia si es compleix la propietat que ens diu l'enunciat. Ara bé el que us preguntem és quin nombre s'ha de posar a la casella amb el signe d'interrogació.

Heu de passar al problema següent el valor comú de la suma dels nombres de cada tres cercles en línia.

Per resoldre el problema 9 cal saber un nombre que passa del problema anterior i un del problema 3.

9. La Yasmina té tres peces rectangulars iguals. Uns dels costats del rectangle tenen com a longitud el nombre que passa del problema 3 (la mesura d'un angle sense indicar els °) i els altres costats mesuren el nombre que passa del problema anterior (suma dels nombres de tres cercles en línia). La Yasmina col·loca les peces com indica l'esquema de la figura de la dreta (que heu d'entendre com això, com un esquema, no pas com un dibuix fet a escala) i aleshores envolta les peces amb una cinta gruixuda. Fet això s'adona que, posi on posi la peça de dalt, sempre necessita la mateixa quantitat de cinta. Quants cm de cinta necessita?



Per si teniu temps: reptes voluntaris

Necessiteu recordar la solució del problema 1.

10. A la biblioteca de l'escola, a l'espai del cicle superior, entre els llibres dedicats a cinquè i els que estan dedicats a sisè, hi ha tants llibres com ha descobert la mainada que feia el problema 1. Avui ha arribat una nova remesa de llibres per a aquest espai de la biblioteca. Si sumem la quantitat de llibres de l'espai de sisè amb els que han arribat resulta un total de 1540. En canvi si sumem la quantitat de llibres de cinquè amb els que han arribat trobem un resultat de 1330. Quants llibres hi haurà a l'espai del cicle superior de la biblioteca de l'escola quan la remesa de llibres nous estiguin classificats?

11. La Joana, la Maria, la Sara i en Tomàs es volen repartir els caramels que hi ha en una bossa. Primer n'agafen 8 cadascú. Després tornen a fer el mateix. I encara ho fan una altra vegada. Però quan proven de tornar-ho a fer resulta que la Joana, la Maria i la Sara sí que tenen 8 caramels per a cada una però en canvi a en Tomàs li han quedat caramels, però menys de 8, i per això en tindria menys que les seves amigues. Després de veure el nombre de que caramels li han quedat a en Tomàs cada una de les tres nenes dóna algun caramel a en Tomàs, totes tres el mateix nombre, i així finalment queda tothom amb el mateix nombre de caramels. Quants caramels hi havia al paquet abans de començar el repartiment?

Cicle superior de primària. Febrer 2009

Participació i centres destacats

En la VIII edició de l'activitat **Problemes a l'esprint** per a equips formats per alumnes del cicle superior de primària, celebrada el 17 de febrer de 2009 van participat un total de 25 equips de 23 centres, un de les Illes Balears, un de la Comunitat Valenciana i tots els altres, de Catalunya. Van enviar totes les respostes correctes un total de 14 equips.

En aquesta convocatòria es van introduir variants en el desenvolupament de l'activitat: menys problemes "per al concurs" i uns reptes voluntaris per si algun centre hi volia dedicar més temps, idees de les quals la comissió en va rebre opinions favorables i per aquesta raó ja es van incorporar a edicions posteriors.

Centres més destacats

- CEIP Gayarre (Barcelona), 2003 segons,
  centre guanyador de l'activitat
- Col·legi Cor de Maria (Valls), 2448 segons
- CEIP Municipal La Sínia (Cerdanyola del Vallès), 2812 segons

Altres centres que han encertat totes les respostes
(per ordre alfabètic del nom del municipi)

CEIP Francesc Burniol (Argentona)
Joan Pelegrí (Barcelona)
MM. Concepcionistes (Barcelona)
Col·legi Jardí (Granollers)
CEIP Jaume I (Llívia)
CP Marian Aguiló (Palma de Mallorca)
CEIP Aurora (Sant Boi de Lluçanès)
Sagrat Cor de Jesús (Súria)
Col·legi Sant Pau Apòstol (Tarragona, dos equips)
CEIP Dr. Fortià Solà (Torelló)
CEIP Andersen (Vic)

Problemes a l'esprint

Cicle superior de primària. Febrer 2009

Les solucions

1. **D. 1990**.

   Observem que la diferència entre els nombres que han dit en Bertomeu i la Cinta és 19. Aleshores si el nombre vertader de llibres fos més gran que els 2001 que ha dit en Bertomeu o els 1982 que ha dit la Cinta algú s'hauria equivocat de més de 19 . Com que cap dels tres ho ha encertat deduïm que el nombre de llibres ha d'estar entre 2001 i 1982 i per això en Bertomeu i la Cinta seran els que s'han equivocat de 8 i d'11, potser no en aquest ordre i, com a conseqüència l'Anna és la que s'ha equivocat de 19. Hi ha 1990 llibres.

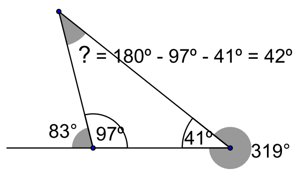
   És clar que, com que el problema es plantejava amb opcions de resposta, no calia fer un raonament tan acurat. Si provàvem cada possible resposta veiem que 1990 era l'única resposta correcta. L'Anna s'ha equivocat de $2009 - 1190 = 19$, en Bertomeu de $2001 - 1990 = 11$ i, finalment, l'error de la Cinta és de $1990 - 1982 = 8$.

2. **3 vegades**.

   És clar que, perquè passi el que diu l'enunciat ha de ser en el moment que s'arriba a una hora en punt per a la qual canviïn les dues xifres de l'hora. I això passa de les 23 a les 00 (el rellotge passa de 23:59:59 a 00:00:00), de les 09 a les 10 (el rellotge passa de 09:59:59 a 10:00:00) i de les 19 a les 20 (el rellotge passa de 19:59:59 a 20:00:00).

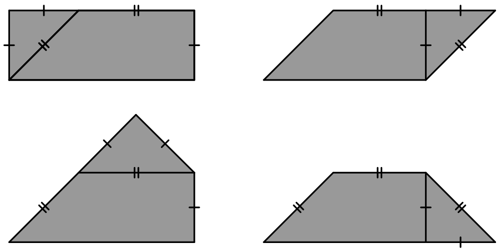
3. **B. 42°**.

   Deduïm el valor de l'angle de 41° de la figura mirant quant li falta al de 319° per arribar a 360°. Trobem el de 97° perquè és el que li falta a 83° per arribar a 180°. Finalment l'angle demanat el calculem a partir del fet que els angles d'un triangle sumen 180°.



4. 4.

Hi ha 4 possibles polígons que es mostren a les figures, on s'ha marcat un altre costat no assenyalat a l'enunciat que té la mateixa mesura que els que estan marcats amb un traç.



5. 80.

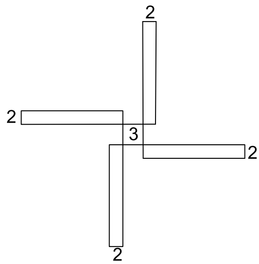
Les xifres centrals podran ser 00, 11, ..., 99; en total 10 possibilitats. Les dels extrems podran ser 2 amb 9 (2 - - 9 o bé 9 - - 2), 3 amb 8 (3 - - 8 o bé 8 - - 3), 4 amb 7 (4 - - 7 o bé 7 - - 4) o bé 5 amb 6 (5 - - 6 o bé 6 - - 5); en total 8 possibilitats. Com que cada una de les 10 possibilitats es pot combinar amb cada una de les altres 8, en total tenim $10 \cdot 8$ nombres que compleixen l'enunciat.

6. B. 0,003 mm.

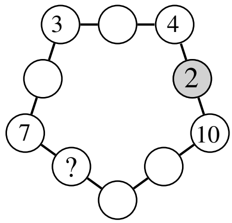
1 metre cada 1000 anys són 1000 mm cada 1000 anys és a dir, 1 mm cada any. Si dividim 1 mm per 365 el resultat aproximat és 0,003 mm.

7. C.

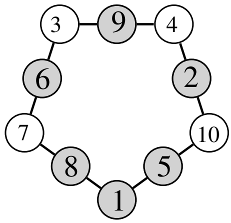
Si es dibuixa el camí que seguirà el robot quan repeteixi una vegada i una altra les instruccions *avança 2, gira a la dreta, avança 15, gira a la dreta, avança 20, gira a la dreta i torna a començar*, parant molta atenció al fet que cal *girar a la dreta* pensant quin és el sentit de la marxa en cada moment, es comprova que l'itinerari és el de la figura de la dreta, que començarà en un dels segments indicats amb un 2. Vegeu que el quadrat central és de 3 unitats de costat.



8. A ? hi va el 8; la suma comuna és 16.



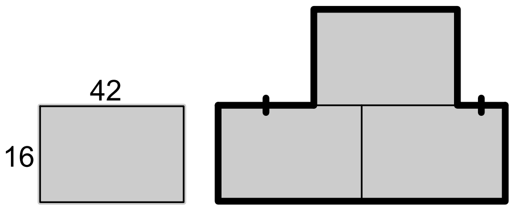
La figura incorpora les dades que passen de problemes anteriors i, tal com es suggereix, primer de tot hem mirat quin nombre va al cercle gris. Com que no hi poden anar ni el 3 ni el 4 per no repetir-se, veiem que hi ha d'anar un nombre petit (1 o 2) perquè si hi poséssim 5 o més no podríem arribar a la mateixa suma al costat de dalt. Si pensem que hi posem l'1 la suma seria 15 i no podríem assolir-la, sense repetir cap xifra, al costat de baix a la dreta, on ja hi tenim un 10. Per tant al cercle gris hi va un 2 i la suma comuna és 16.



A la figura de la dreta ja es pot veure l'esquema amb tots els nombres posats. Després de situar el 2 com hem comentat, de seguida es poden posar el 9 i el 6. Aleshores veiem que ens queden l'1, el 5 i el 8 per als tres cercles inferiors i constatem que l'1 només pot anar al cercle de baix de tot, comú a dos costats. I així ja podem acabar de posar tots els nombres.

9. 232.

La Yasmina s'adona que entre els dos trossos de cinta assenyalats amb un traç fan el mateix que un dels costats grans dels rectangles. Vist això, ja sap que el total de la cinta és el mateix que quatre costats grans més quatre costats petits i així troba el resultat: $4 \times (16 + 42) = 232$.



10. 2430.

Si fem servir el resultat del problema 1 tindrem que entre els llibres dedicats a cinquè i els que estan dedicats a sisè, n'hi ha 1990. L'enunciat diu que entre els llibres de sisè i els que han arribat són 1540 i també que la suma dels de cinquè més els que han arribat dóna 1330. Si sumem $1990 + 1540 + 1330 = 4860$ haurem comptat exactament dues vegades tots els llibres. Per tant el nombre total de llibres que hi haurà és $\frac{4860}{2} = 2430$.

---

11. 124.

Comencem pel final i pensem quants caramels pot haver donat cada nena a en Tomàs per quedar-se amb el mateix nombre. Si dels 8 que han agafat l'última vegada cada nena en donés 1 a en Tomàs, elles es quedarien amb 7. Per quedar-se també finalment amb 7, com que n'hi donen 3, en Tomàs hauria d'haver-ne trobat 4 a la bossa, cosa possible. Pensem ara si és possible que cada nena en donés 2 a en Tomàs; elles es quedarien amb 6 i entre totes tres n'hi donen 6 a en Tomàs que, per quedar-se també finalment amb 6, hauria hagut de passar que no en trobés cap a la bossa però l'enunciat diu que sí que hi havia trobat caramels. No podem pensar que, dels 8 qaue han agafat l'última vegada, cada nena doni 3 o més caramels a en Tomàs perquè aleshores segur que ell en tindria més que cada una d'elles.
Vist això, el total de caramels que hi havia a la bossa és: $3 \times (8 + 8 + 8 + 8)$ que agafen les tres primeres voltes, als quals hem de sumar els $8 + 8 + 8 + 4$ que hem deduït que era l'única possibilitat per a l'última volta de la recollida de caramels.

Problemes a l'esprint

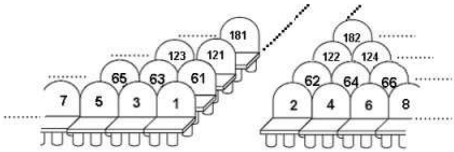
Primer cicle d'ESO. Març 2009

Problemes de la branca d'olivera

1. La Maria té una botiga de queviures. Ahir va comprar 50 quilos de taronges a 0,50 € el quilo i de seguida les va posar a la venda a 1 € el quilo i en va vendre 30 quilos. Al vespre se'n va emportar 5 quilos per a ella. Avui volia acabar-les de vendre i per això ha fet una oferta de *emporti-se'n 3 i pagui'n 2*, és a dir que cadascú que compra 3 quilos, només en paga 2. Tothom que ha anat a comprar taronges ha aprofitat l'oferta i així la Maria ha aconseguit vendre totes les taronges. Quants euros de benefici ha obtingut la Maria en la venda de les taronges?
(Nota: El benefici vol dir la diferència entre els diners que ha obtingut de la venda menys els que s'havia gastat per comprar les taronges)

La solució d'aquest problema s'ha de passar al problema 7 com a nombre Q.

2. En un auditori molt gran les butaques estan col·locades en files, totes amb el mateix nombre de butaques a un costat i l'altre del corredor central, que és ample com dues butaques. Les butaques de l'esquerra (mirant des de l'escenari) estan numerades correlativament amb els nombres imparells i les de la dreta amb els nombres parells, com es mostra a la figura.



L'Anna ha comprat una entrada pel proper espectacle i li han donat el número 2009. La seva amiga Imma ha decidit que també vol anar-hi i li han ofert les entrades amb els números que es poden veure a les opcions de resposta. Quina entrada triarà l'Imma si vol estar al més a prop possible de l'Anna?

A) 2010 B) 1999 C) 2063 D) 1947 E) 1929

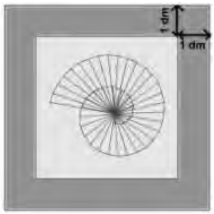
3. En una carretera hi ha set poblacions, que designarem com **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F** i **G**, que es troben en aquest ordre seguint la carretera, que és l'única que uneix aquestes poblacions.
En Joan tenia una taula amb les distàncies en quilòmetres entre cada parella d'aquestes poblacions, però se li han esborrat bona part de les dades de la taula i per això ara només hi consten 6 d'aquestes distàncies.
(Per exemple veu que des de B fins a E hi ha 27 quilòmetres i des de B fins a G, 48 quilòmetres.)

A						
	B					
		C				
19			D			
	27			E		
47		*34*			F	
	48		*37*			G

Podries ajudar en Joan i dir-li quina és la distància en quilòmetres que hi ha entre les poblacions **A** i **G**?

Per resoldre aquest problema cal saber un nombre M que passa del problema 5.

4. La Joana ha pintat un quadre en un llenç quadrat i l'ha emmarcat amb un marc d'1 dm d'ample. Ha necessitat tants dm^2 de fusta per fer el marc com indica el nombre M que us passen del problema 5. Quina és l'àrea, expressada en dm^2, del llenç on hi ha la pintura?



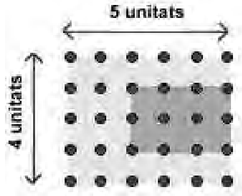
El resultat d'aquest problema (sense unitats) passa al primer repte, problema 9, com a nombre S.

Problemes del colom de la pau

5. L'Antoni volia escriure tots els números de l'1 al 2009, un després de l'altre, però s'ha cansat i només ha escrit fins al 209. Aleshores pensa un moment i dedueix ràpidament que la xifra que ha escrit més és l'1. Ara us demanem a vosaltres que penseu quina és la xifra que ha escrit menys vegades i que calculeu quantes vegades l'ha escrit.

La solució passa al problema 4 com a nombre M.

6. Observeu a la figura de la dreta que si construïm un geoplà en un rectangle de dimensions 5×4 hi ha 30 punts. En el geoplà de la figura hem marcat un rectangle de mides 3×2 que podeu veure que, comptant totes els punts que hi pertanyen (els del perímetre i els interiors) abasta 12 punts.



Ara imagineu un geoplà en un rectangle de dimensions 50×42.
En aquest geoplà volem marcar un rectangle que abasti 2009 punts (comptant tots els que hi pertanyen: els del perímetre i els interiors).
En quantes posicions diferents podem situar el vèrtex inferior esquerre d'aquest rectangle?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 9

Per aquest problema es necessita un nombre Q, que passa del problema 1.

7. En Ventura, un dia que per obres no hi ha trens, ha decidit anar en cotxe de casa a la feina. Quan es troba justament a mig camí s'adona que la llumeta que marca el nivell de gasolina se li encén intermitentment i que per tant s'està quedant sense gasolina. Com que sap on és la gasolinera més propera, situada exactament a la meitat del trajecte que ja ha recorregut, torna un tros enrera per posar gasolina. Després d'omplir el dipòsit, posa el comptaquilòmetres a zero i aleshores ja va ràpidament cap a la feina. Quan hi arriba, constata que el comptador indica tants quilòmetres com el valor Q que us passen del problema 1. Quants quilòmetres ha de recórrer en Ventura per anar directament de casa a la feina?

---

8. Imagineu que tenim un paper rectangular i que fem les dues accions següents:
(1) el partim per la meitat per un tall paral·lel a un dels costats.
(2) agafem un dels dos rectangles que hem obtingut i el tornem a tallar per la meitat, paral·lelament a un dels costats.
Hi ha tres rectangles diferents que després d'aplicar-los aquestes dues accions donen com a resultat final rectangles de 6 cm $\times$ 4 cm. Naturalment tots els rectangles amb aquesta propietat tenen inicialment una superfície de 96 cm^2 però, de tots ells, quants cm de perímetre té el que té perímetre màxim?

El resultat d'aquest problema (sense unitats) passa al primer repte, problema 9, com a nombre T.

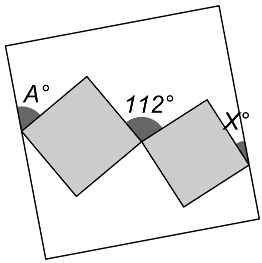
Reptes finals

Per trobar la resposta numèrica d'aquest problema cal saber les respostes dels problemes 4 (S) i 8 (T).

9. La Clara ha escrit quatre nombres diferents a la pissarra. En David escull tres d'aquests nombres, els suma, i li dóna S. L'Elena també escull tres dels quatre nombres, els suma, i li dóna T. En Francesc fa el mateix, escull tres dels quatre nombres i els suma, i obté 88. També ho fa la Gisela i obté 84. És clar que cadascú ha escollit els tres nombres de maneres diferents, i ja ho han fet de totes les maneres possibles. Quin és el nombre més gran que ha escrit la Clara?

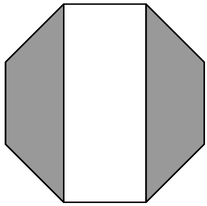
La solució d'aquest problema passa al següent com a angle A.

10. A l'interior d'un rectangle hi hem situat dos quadrats que tenen un vèrtex comú i cada quadrat té un altre vèrtex en un costat del rectangle. A la figura (que només heu de prendre com un esquema; els angles no hi són pas dibuixats amb correcció) s'indica la mesura de dos angles, un de A° on A és el nombre que passa del repte anterior i l'altre de 112°. Quina és la mesura en graus de l'angle indicat com X° a la figura?



Per si teniu temps: reptes voluntaris

11. En l'octàgon regular de la figura (tots els costats i tots els angles són iguals), quin percentatge de la superfície total hem acolorit?



12. Volem posar en una fila 25 boles blanques, 14 boles grises i 10 boles negres de manera que no quedin dues boles del mateix color una al costat de l'altra. A quina conclusió de les següents arribarem amb seguretat?

A) No podrem col·locar les boles en fila tal com indica l'enunciat
B) Sí que ho podrem fer i segur que hi haurà una bola gris al costat d'una bola negra
C) Sí que ho podrem fer i segur que hi haurà alguna bola blanca que té les dues veïnes negres
D) Sí que ho podrem fer i segur que hi haurà com a mínim 3 boles blanques que tenen cada una dues veïnes grises, però ho podem fer sense que això passi per a 4 boles blanques
E) Sí que ho podrem fer i segur que hi haurà com a mínim 4 boles blanques que tenen les dues veïnes grises

Problemes a l'esprint

Primer cicle d'ESO. Març 2009

Participació i centres destacats

En la VIII edició de l'activitat **Problemes a l'esprint** per a equips del primer cicle de l'ESO es va aconseguir un récord de participació, amb un total de 69 equips de 67 centres, un de Menorca, a les Illes Balears, 9 de la Comunitat Valenciana i tots els altres, de Catalunya. Van enviar totes les respostes correctes un total de 27 equips.

Atenent a l'elevada participació i al nivell assolit en l'encert de les respostes, la comissió organitzadora va decidir convidar quatre centres d'aquesta convocatòria a l'acte d'entrega de premis.

Centres més destacats

- Col·legi Cor de Maria de Valls, 2792 segons
  centre guanyador de l'activitat
- IES Arquitecte Manuel Raspall de Cardedeu, 3225 segons
- IES Samuel Gili i Gaya de Lleida, 3443 segons. segons
- IES Les Corts de Barcelona, 3624 segons. segons

Altres centres amb encert ple amb menys d'una hora i un quart
(per ordre alfabètic del nom del municipi)

IES Montserrat de Barcelona
IES Pere Fontdevila de Gironella
Col·legi Regina Carmeli de Rubí
IES Sabadell de Sabadell

Altres centres que han encertat totes les respostes
(per ordre alfabètic del nom del municipi)

IES d'Albal (Albal)
IES Rafel de Campalans (Anglès)
IES Badalona VII (Badalona)
Els Arcs (Barcelona)
IES Ernest Lluch (Barcelona)
Joan Pelegrí (Barcelona)
SES Comas i Solà (Barcelona)
IES Guillem de Berguedà (Berga)
IES Sos Baynat (Castelló)
IES Vicent Castell (Castelló)
IES Joanot Martorell (Esplugues de Llobregat)
IES Olivar Gran (Figueres)
IES Santa Eugènia (Girona)
IES Vicens Vives (Girona)
IES El Pedró (L'Escala)
IES Montserrat Miró (Montcada i Reixac)
IES Montsacopa (Olot)
IES Marta Mata (Salou)
IES Torre Roja (Viladecans)

Problemes a l'esprint

Primer cicle d'ESO. Març 2009

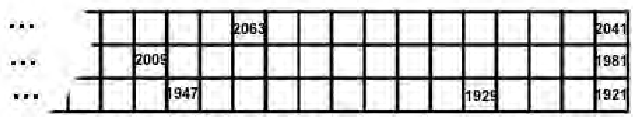
Les solucions

1. 15.

La Maria ha gastat $50 \times 0{,}5 = 25$ € . El primer dia ingressa 30 € pels 30 kg que ven. Com que s'enduu per a ella 5 kg, n'hi queden 15 per vendre que són cinc lots de 3 kg que ven a 2 € cada un.
En total, doncs, ingressa 10 € més. Benefici: $30 + 10 - 25 = 15$ €.

2. D. 1947.

Es pot veure a la figura que en cada fila hi ha 60 butaques. Si dividim 2009 entre 60 veurem que les 33 primeres files abasten del número 1 al 1980. A la fila següent, a l'esquerra hi haurà el 1981, 1983, 1985,...., 2005, 2007, 2009, (a la butaca 15a), etc... El 2010 estarà a la mateixa fila però a la quinzena butaca de la dreta, molt lluny! Si fem el mateix amb cada una de les entrades proposades (una divisió) veurem que l'esquema és:



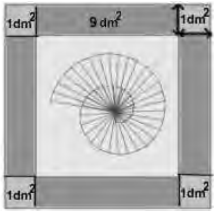
i queda clar, doncs, que l'entrada que queda més a prop de la 2009 és la 1947.

3. 56.

Amb dues dades que estiguin a la mateixa fila o dues dades que estiguin a la mateixa columna se'n pot deduir una altra. I així, amb paciència, podríem anar omplint tota la taula, però això no és pas el que es demana. Si parem atenció veurem que sabem la distància de **A** a **D** (19 km) i la de **D** a **G** (37 km) i, doncs, la distància de **A** a **G** és 19 + 37 = 56 km.

4. 81.

Si mirem bé la figura veurem que a les cantonades del marc tenim quatre quadrats de 1 cm^2 cadascun. Amb això queden 36 cm^2 a repartir entre quatre rectangles iguals i, per tant, cada un d'aquests rectangles tindrà 9 cm^2. Com que un dels costats fa 1 cm, l'altre farà 9 cm. Però aquest altre és el costat del llenç quadrat on hi ha la pintura. Per tant l'àrea demanada és $9 \times 9 = 81$ cm^2.

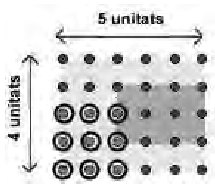


5. 40.

Com que en els nombres d'una xifra podríem dir que és "com si hi faltés el 0 inicial" es dedueix que el 0 és la xifra que ha aparegut menys vegades. Quants zeros hi ha? De l'1 al 99 només els de les desenes: 9, i igualment del 110 al 190, 9 zeros més. Del 100 al 109 hi ha 11 zeros més i igualment del 200 al 209. Tot plegat $2 \times 9 + 2 \times 11 = 40$ zeros.

6. E. 9.

Si preguntéssim en quantes posicions podríem posar el rectangle acolorit més fosc, sense girar-lo, en el geoplà de la figura que es donava com a exemple quina seria la resposta? Segur que veieu que hi ha 9 possibles punts per al vèrtex inferior esquerre. En aquest cas estaríem col·locant un rectangle que abasta 12 punts i té dimensions 3×2 en un rectangle de dimensions 5×4.



Perquè en el nostre gran geoplà de 50×42 un rectangle abasti 2009 punts han de ser 49 columnes de 41 punts cada una, cosa que correspon a un rectangle de 48×40.
Si imagineu la figura engrandida cap a la dreta i cap amunt veureu que també en aquest cas hi ha 9 possibles punts per al vèrtex inferior esquerre.

7. 20.

Si en Ventura ha recorregut la meitat del trajecte i torna enrere la meitat del que ja havia recorregut (és a dir, un quart) haurà de fer tres quartes parts del trajecte per arribar a la feina. Si $\frac{3}{4}$ de la distància total de casa a la feina són 15 km, es calcula de seguida que la dustància total són 20 km.

8. 56 cm.

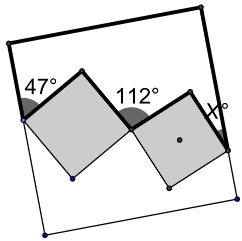
El rectangle de 6 cm $\times$ 4 cm pot ser el resultat, mitjançant el procediment indicat a l'enunciat, d'un rectangle de 12 cm $\times$ 4 cm o bé d'un altre de 6 cm $\times$ 8 cm. El primer d'aquests pot ser el resultat de partir per la meitat un rectangle de 24 cm $\times$ 4 cm o un de 12 cm $\times$ 8 cm i el segon pot provenir també d'un de 12 cm $\times$ 8 cm o d'un altre de 6 cm $\times$ 16 cm. Ja hem trobat els tres rectangles que deia l'enunciat. Es pot comprovar que el que té el perímetre màxim dels tres és el de 24 cm $\times$ 4 cm, que té un perímetre de 56 cm.

9. 47.

Si anotem els resultats que passen d'altres problemes i aleshores fem la suma dels resultats de les sumes parcials de tres en tres, que són 81 la d'en David, 56 la de l'Elena, 88 la d'en Francesc i 84 la de la Gisela, obtindrem $81 + 56 + 88 + 84 = 309$ i, de fet, haurem sumat tres vegades cada un dels nombres que ha escrit la Clara. Per tant els quatre nombres sumen $\frac{309}{3} = 103$. Per altra banda és segur que l'Elena, que ha obtingut el resultat més petit serà la que no ha sumat el nombre més gran. Per tant el nombre més gran és $103 - 56 = 47$.

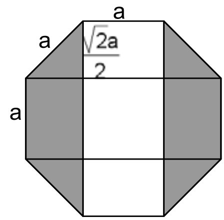
10. 21°.

Observeu l'heptàgon que s'ha ressaltat a la figura. En aquest heptàgon hi ha dos angles de 90°, dos de 270°, un de 47°, un de 112° i el que ens demanen. Com que la suma dels angles interiors d'un heptàgon és $5 \cdot 180° = 900°$ es dedueix de seguida que l'angle que ens falta és de 21°.

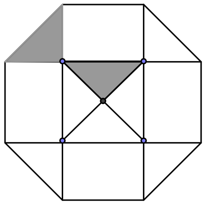


11. El 50%.

Si ho volem fer per càlcul, primer de tot podem descompondre cadascun dels trapezis acolorits en un rectangle i dos triangles isòsceles rectangles. Si a és la longitud del costat de l'octàgon, el teorema de Pitàgores ens diu que els catets d'aquests triangles fan $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. L'àrea del rectangle blanc és $a \cdot (a + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}a}{2}) = (1 + \sqrt{2})a^2$. Si calculem l'àrea d'un dels trapezis, tenint en compte que les bases són $a+2\cdot\frac{\sqrt{2}a}{2}$ i a i l'altura $\frac{\sqrt{2}a}{2}$ i tenim en compte que hi ha dos trapezis acolorits veurem que l'àrea acolorida és la mateixa que l'àrea blanca.



Tanmateix la segona figura ens mostra una manera geomètrica de raonar-ho. A partir del fet que els dos triangles ressaltats en aquesta figura són iguals es constata ràpidament per composició de figures el mateix resultat al qual hem arribat per càlcul.



12. D.

Per poder fer el que indica l'enunciat, les 25 boles blanques hauran de posar-se separades i deixaran entre elles 24 "forats" que haurem d'omplir amb gris (G) i negre (N). Si dues boles G queden en dos forats consecutius la bola blanca que hi ha en mig tindrà dues veïnes G. Per valorar les opcions D) i E) haurem de procurar alternar en els forats bola G i bola N. Si comencem posant en els forats G N G N ... quedaran 4 boles G que ompliran els quatre darrers forats. És clar que no poden quedar menys de 4 boles G en forats consecutius. Ara bé, aquestes quatre boles G deixen entre elles només 3 boles B.

L'esquema de la solució és

B G B N B G B N B G B N ..... B N B G B N B G $\underline{B}$ G $\underline{B}$ G $\underline{B}$ G B

on s'han destacat les úniques tres boles B que tenen dues veïnes G.

Problemes a l'esprint

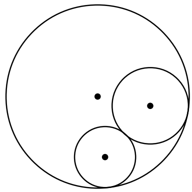
Segon cicle d'ESO i Batxillerat. Abril 2009

Problemes de la branca d'olivera

1. La professora ha proposat la divisió d'un nombre natural N per 2009. L'Albert ha dit: *Mireu, el residu de la divisió és una unitat més gran que el quocient.* La Berta comenta encertadament: *És que el nombre N és el més gran que compleix aquesta propietat que ha esmentat l'Albert.*
Quant sumen les xifres de N?

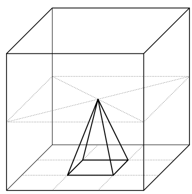
La solució del problema 1 s'ha de passar al problema 5 com a nombre E.

2. La figura mostra tres cercles de radis 12, 5 i 4, tangents dos a dos. Quin és el perímetre del triangle definit pels centres dels tres cercles?



Per resoldre el problema 3 cal conèixer un nombre A que us han de passar del problema 5. Tanmateix, sense aquest valor ja podeu anar pensant el problema!

3. A dintre d'un cub d'aresta A cm hi hem situat una piràmide quadrangular, que té la base recolzada en una de les cares del cub per la part interior. Les dimensions comparades del cub i la piràmide es poden observar a la figura, on també es veu que per construir la piràmide hem dividit els costats de la base del quadrat en tres parts iguals i les arestes verticals en dues parts iguals. Quin és el volum de la piràmide?



A) 12 cm^3 B) 9 cm^3 C) 8 cm^3 D) 6 cm^3 E) 4 cm^3

4. En una població de rates el 25% són blanques i el 75%, negres. La meitat de les rates blanques i la cinquena part de les rates negres tenen la cua llarga. Sabem que hi ha 99 rates amb la cua llarga. Quantes rates hi ha a la població?

Problemes del colom de la pau

Per resoldre el problema 5 cal conèixer un nombre E que us han de passar del problema 1. Tanmateix sense aquest valor ja podeu anar pensant el problema!

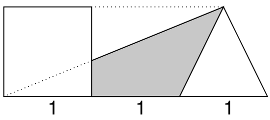
5. Una família va anar de viatge als EUA i, en aquella època, la taxa de canvi feia que per cada E euros els donessin 26 dòlars. Quan havien gastat 2009 dòlars es van adonar que els quedaven encara exactament tants dòlars com euros havien canviat. Quants dòlars havien rebut quan van fer el canvi de divises?

La xifra de les desenes de la solució d'aquest cinquè problema s'ha de passar al problema 3 com a nombre A.

6. A l'Anna l'han convidada a una festa d'aniversari a la qual hi assisteixen 12 persones, ella inclosa, i només coneix a una altra de les persones que s'han aplegat. En Lluís, un altre dels assistents, només en coneix dues. La tercera assistent, la Joana, en coneix tres. I així successivament, de manera que es poden ordenar onze de les persones convidades de manera que cada una coneix una persona més que l'anterior, i així fins arribar a la persona número 11 que coneix a tots els assistents. Quantes persones coneix el dotzè i darrer convidat?

Heu de suposar que si una persona X en coneix una altra, Y, aleshores la persona Y coneix X.

7. Equips d'ESO. A la figura podeu veure un quadrat de costat 1 i un triangle isòsceles de base 1 i altura 1. Un costat del quadrat i un costat del triangle isòsceles estan situats sobre una recta i la distància entre els dos vèrtexs més propers també és 1. Quina és la mesura, en unitats quadrades, de l'àrea ombrejada?



A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{9}{10}$ D) 1 E) Més de 1

7. Equips d'ESO i BTX. Suposat que a, b, c són nombres reals positius que compleixen $a^2 = b^2 + c^2$, busca l'expressió simplificada de

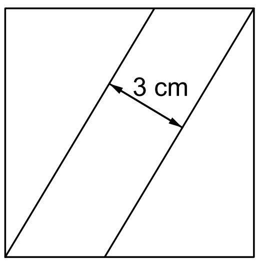
$$\sqrt{(a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(a+c-b)\cdot(b+c-a)}$$

A) $\frac{bc}{2}$ B) $\frac{bc}{\sqrt{2}}$ C) bc D) $\sqrt{2}bc$ E) $2bc$

8. Equips d'ESO. L'Anna ha construït una successió que comença amb els números 59, 99, 209. A partir d'aquí escriu nombres successivament cadascun dels quals és el resultat de restar el nombre que fins aleshores és l'últim de la llista de la suma dels dos anteriors a aquest. Per exemple el quart terme és $59 + 99 - 209 = -51$ i el cinquè és $99 + 209 - (-51) = 359$. L'Anna veu que un dels termes de la successió és 2009. En quin lloc de la successió apareix el número 2009?

La solució passa al problema 9 com a nombre N.

8. Equips d'ESO i BTX. La figura, (que no està feta a escala, només és un esquema) mostra un quadrat i dues rectes paral·leles que s'han traçat des de dos vèrtexs oposats del quadrat, situades a una distància de 3 cm. Si amb aquesta construcció el quadrat ha quedat dividit en tres parts de la mateixa superfície, quina és l'àrea del quadrat?



La solució passa al problema 9 com a nombre N.

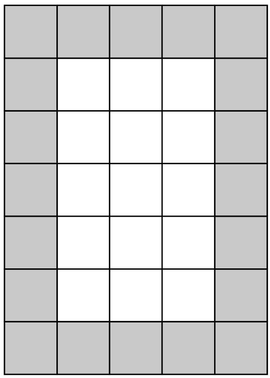
Reptes finals

Tant si l'equip és d'ESO com si és conjunt ESO/BTX, per resoldre el problema 9 cal conèixer un nombre N que us han de passar del problema 8. Tanmateix sense aquest valor ja podeu anar pensant el problema!

9. Equips d'ESO. En una bossa hi ha 1000 boles, numerades de l'1 al 1000. Quantes boles d'aquesta bossa tenen un nombre que és múltiple de N o de $N-3$?
(és clar que cal comptar només una vegada els nombres que són múltiples de tots dos alhora)

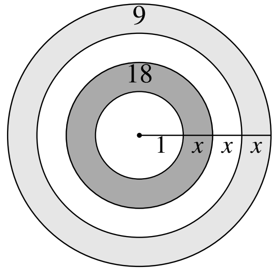
9. Equips d'ESO i BTX. Els set nans tenen cada un una samarreta amb un número de l'1 al 7. Cada dia la Blancaneus el fa posar l'un al costat de l'altre i així veu un nombre de set xifres. Ara bé, ho ha de fer amb la condició que els nans amb les samarretes 1 i 2 quedin sempre junts i en canvi els que tenen les samarretes 6 i 7 quedin sempre separats. Si ordenem en ordre creixent tots els nombres diferents de set xifres que pot veure la Blancaneus, quin queda en el lloc n^2 on n és el divisor primer més gran del nombre N que us han passat?

10. En Joan té moltes peces quadrades, blanques, i la Joana moltes de grises, totes de la mateixa mida. Amb aquestes peces volen compondre un rectangle que tingui peces blanques a l'interior i peces grises a les vores, com succeeix a la figura de la dreta. En un cert moment (que no correspon pas a la figura, on hi ha 15 peces blanques i 20 de grises) la Joana diu: *Mira, hem aconseguit compondre el rectangle més gros possible amb el mateix nombre de peces blanques que grises!*. Quantes peces han posat en total la Joana i en Joan?



Reptes voluntaris

11. En Pere i la Teresa estan dissenyant una diana. Han decidit que el cercle central tindrà 1 unitat de radi i, al seu voltant, hi haurà tres corones circulars de la mateixa amplada i que assignaran les puntuacions de cada zona de manera inversament proporcional a les àrees respectives. Quan ja han dibuixat la diana la Teresa s'adona que l'àrea de la zona gris clar és el doble que l'àrea de la zona gris fosc. Aleshores en Pere diu: *Molt bé! Els assignarem respectivament 9 i 18 punts.* Si ho fan d'aquesta manera, quant sumaran les puntuacions que hauran d'assignar a les dues zones de color blanc?



12. Quin és el mínim nombre d'angles obtusos que, necessàriament, ha de tenir un heptàgon convex?

Problemes a l'esprint

Segon cicle d'ESO i Batxillerat. Abril 2009

Participació i centres destacats

La darrera convocatòria dels **Problemes a l'esprint** del curs 2008-2009 era la XVI adreçada a equips d'alumnes de segon cicle d'ESO i batxillerat. Es va desenvolupar el 29 d'abril de 2009 i hi van participar un total de 57 equips de 53 centres, un de l'illa de Mallorca, 7 de la Comunitat Valenciana i tots els altres, de Catalunya. La comissió organitzadora va incorporar les variants de desenvolupament de l'activitat (algun problema menys i altres fora de concurs, voluntaris) i ha rebut missatges encoratjadors que ens diuen que l'activitat ha esdevingut ben interessant.

Gràcies a tothom i fins a la propera!

Centres més destacats

- CEPSA Oriol Martorell (Barcelona), 41 minuts,
  centre guanyador de l'activitat
  format només per alumnes d'ESO
- IES Montserrat (Barcelona), 47 minuts
- Aula Escola Europea (Barcelona), 51 minuts,
  equip format només per alumnes d'ESO

Altres centres que han encertat totes les respostes
(per ordre alfabètic del nom del municipi, (*) indica equip només d'ESO)

IES d'Albalat de la Ribera (Albalat de la Ribera) (*)
IES Bellaguarda (Altea) (*)
IES Baltasar Porcel (Andratx) (*)
IES Jaume Balmes (Barcelona)
IES Maragall (Barcelona)
Joan Pelegrí (Barcelona)
Pare Manyanet (Barcelona) (*)
IES de la Bisbal (La Bisbal d'Empordà)
IES Arquitecte Manuel Raspall (Cardedeu)
IES Jaume Vicens Vives (Girona)
IES Santa Eugènia (Girona)
IES Samuel Gili i Gaya (Lleida)
IES Gregori Maians (Oliva)
IES Montsacopa (Olot)
Col·legi Regina Carmeli (Rubí) (*)
Col·legi El Cim (Terrassa) (*)
Col·legi Sagrat Cor (Terrassa) (*)
Col·legi Tecnos (Terrassa)
Col·legi Sagrada Família (Tortosa) (*)
IES de la Vall d'Alba (Vall d'Alba)
Cor de Maria (Valls) (*)

Problemes a l'esprint

Segon cicle d'ESO i Batxillerat. Abril 2009

Les solucions

1. 19.

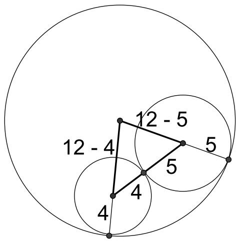
Per trobar el nombre més gran que compleix la condició que ens demanen és clar que el quocient haurà de ser tan gran com sigui possible. Però com que en aquest cas es relacionen el quocient i el residu i el residu com a màxim pot ser 2008, trobarem N com el nombre que dividit per 2009 dóna 2008 de residu i 2007 de quocient.

Aquest nombre és $N = 2009 \cdot 2007 + 2008 = 4034071$. La suma de les xifres de N és, doncs, 19.

Passa $E = 19$ al problema 5

2. 24.

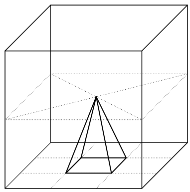
La figura mostra que, aplicant adequadament la idea de tangència, els tres costats del triangle són: la suma dels dos radis petits, el radi gran menys el radi mitjà i el radi gran menys el radi petit.



Del problema 5 passa $A = 6$

3. E. 4 cm ^{2}.

El volum d'una piràmide és $\frac{1}{3} \cdot S \cdot a$ on S és l'àrea de la base i a és l'altura de la piràmide. Si s'observa acuradament la figura, com que l'aresta del cub és 6, resulta que el costat del quadrat que és base de la piràmide és $\frac{6}{3} = 2$ i per tant serà $S = 4$ i que l'altura és $\frac{6}{2} = 3$.



4. 360.

Com que el 25% equival a $\frac{1}{4}$ i el 75% a $\frac{3}{4}$, a partir de l'enunciat resulta que la fracció de rates de cua llarga és $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{11}{40}$.

Així doncs $99 = \frac{11}{40}$ del total de rates.

Per tant el nombre demanat és $\frac{99 \cdot 40}{11} = 360$.

Del problema 1 passa $E = 19$

5. 7462.

Si x representa el nombre d'euros que portaven, l'enunciat es tradueix així a una equació: $\frac{26}{19} \cdot x - 2009 = x$. Si es resol aquesta equació resulta $x = 5453$ però com que es demana el nombre de dòlars, aquest serà $\frac{26}{19} \cdot 5453 = 7462$.

Passa $A = 6$ *al problema 3.*

---

6. 6.

Posarem $A_1, A_2, ..., A_{11}, A_{12}$ les persones assistents i indicarem amb $\leftrightarrow$ la relació de coneixença.

Si A_1 només coneix una persona i A_{11} les coneix totes es dedueix que $A_1 \leftrightarrow A_{11}$.

Raonant de manera semblant, com que A_2 coneix dues persones, una d'elles serà A_{11} i l'altra ha de ser A_{10} que coneix totes les persones menys una; la que no coneix és A_1. Per tant $A_2 \leftrightarrow A_{11}$ i $A_2 \leftrightarrow A_{10}$.

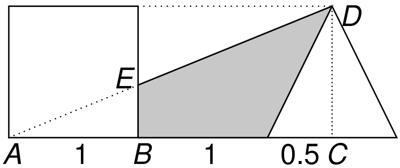
Així podem anar seguint i veurem que $A_3 \leftrightarrow A_{11}, A_{10}, A_9$, que $A_4 \leftrightarrow A_{11}, A_{10}, A_9, A_8$ i que $A_5 \leftrightarrow A_{11}, A_{10}, A_9, A_8, A_7$

Quan arribem a A_6 raonarem que coneix $A_{11}, A_{10}, A_9, A_8, A_7$ però a més ha de conèixer una altra persona que no pot ser cap de A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Per tant $A_6 \leftrightarrow A_{12}$.

Semblantment, ja tenim escrites 6 persones conegudes de A_7 i en sabem 4 que no el coneixen. Deduïm doncs que $A_7 \leftrightarrow A_{12}$ i anàlogament es raona que $A_8 \leftrightarrow A_{12}$, $A_9 \leftrightarrow A_{12}$, $A_{10} \leftrightarrow A_{12}$ i, com que ja sabíem per l'enunciat que A_{11} coneix totes les altres persones convidades, $A_{11} \leftrightarrow A_{12}$

7. Equips d'ESO. E. $\frac{4}{5}$.

Els triangles ACD i ABE de la figura són semblants. Per tant $\frac{CD}{AC} = \frac{BE}{AB}$ i com que $CD = AB = 1$ i $AC = \frac{5}{2}$ es dedueix que $BE = \frac{2}{5}$. Podem calcular l'àrea demanada com l'àrea del trapezi $BCDE$, que és $\frac{1+\frac{2}{5}}{2} \cdot \frac{3}{2}$, menys la meitat de l'àrea del triangle isòsceles inicial, és a dir $\frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 1}{2}$. El resultat és el que s'ha indicat.



7. Equips d'ESO i BTX. E. $2bc$.

Pensant que aquesta és una qüestió "amb opcions", és clar que si l'enunciat s'ha de complir en general també s'haurà de complir per valors concrets que donem a a, b, c.

Si posem $a = 5, b = 4, c = 3$, que compleixen $a^2 = b^2 + c^2$, i busquem el valor de

$$\sqrt{(a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(a+c-b)\cdot(b+c-a)}$$

resulta 24, que només pot correspondre a la resposta E).

Tanmateix el que acabem de fer consisteix només a "*trobar la solució per als problemes a l'esprint*" però potser no és "*resoldre el problema*". És interessant veure una demostració general del que es demanava.

Si en l'expressió del radicand, és a dir$(a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(a+c-b)\cdot(b+c-a)$ agrupem el primer factor amb el quart podem aplicar la propietat de suma per diferència i tenim $(b+c+a)\cdot(b+c-a) = (b+c)^2 - a^2$ i si desenvolupem i apliquem la condició $a^2 = b^2 + c^2$ resulta $2bc$. Semblantment agrupem el segon i el tercer factor i tenim $(a+b-c)\cdot(a+c-b) = (a+b-c)\cdot(a-(b-c)) = a^2 - (b-c)^2 = ... = 2bc$. Per tant el que tenim és $\sqrt{2bc \cdot 2bc}$ i arribem al resultat indicat.

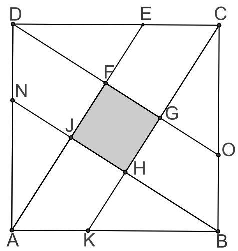
8. Equips d'ESO. 27.

Atenent al fet que es pot treballar a l'aula d'informàtica aquest és un bonic exemple per fer amb el full de càlcul. Si escrivim 59 a la cel·la A1, a A2, 99, a A3, 209, i a A4 la fòrmula A1+A2-A3 i copiem aquesta fórmula per arrossegament a la columna A, veurem que a la cel·la A27 hi apareix 2009. Tanmateix, també podem fer-ho "a mà". Si posem a, b, c els tres primers termes de la successió, els següents són $a+b-c, 2c-a, 2a+b-2c, 3c-2a, \ldots$. Deduïm que en el lloc $2+2k$ apareix el terme $k \cdot a+b-k \cdot c$ que es fa negatiu de seguida i per tant no serà en cap cas 2009 i en el lloc $3+2k$ hi tenim $(k+1) \cdot c-k \cdot a$. Si posem $a=59$ i $c=209$ aquesta expressió ens dóna 2009 per $k=12$, que correspon al 27è terme de la successió.

La solució, N = 27 passa al problema 9 per als equips només d'alumnes d'ESO.

8. Equips d'ESO i BTX. 117.

Des dels altres dos vèrtexs del quadrat fem la mateixa construcció que indica l'enunciat, mitjançant perpendiculars als segments que divideixen el quadrat en tres parts d'igual àrea. D'aquesta manera el quadrat queda dividit en quatre triangles rectangles iguals, AFD, DGC, CHB i BJA i un quadrat central.



L'àrea del paral·lelogram $AKCE$ i la del triangle AED han de ser iguals i si prenem com a base el segment comú AE, aleshores si l'altura FG del paral·lelogram és 3, la del triangle, és a dir DF, serà 6. Així veiem que els quatre triangles triangles rectangles que hem indicat tenen catets 9 i 6 i, naturalment, el quadrat $FGHJ$ té costat 3. Per tant l'àrea del quadrat serà: $4 \cdot (\frac{6 \cdot 9}{2}) + 3^2 = 108 + 9 = 117$.

La solució, N = 117 passa al problema 9 per als equips conjunts d'ESO i Batxillerat.

Solucions als reptes finals

9. Equips d'ESO. 74.

Passa $N = 27$ del problema 8. Serà $N - 3 = 24$. Com que el quocient de dividir 1000 per 27 és 37, hi ha 37 múltiples de 27 en el conjunt de nombres naturals de l'1 al 1000. De la mateixa manera veiem que hi ha 41 múltiples de 24. Com que el mínim comú múltiple de 27 i 24 és 216 els múltiples d'aquest nombre seran els múltiples comuns de 24 i 27; n'hi haurà 4. Per tant la solució del problema és $37 + 41 - 4 = 74$.

---

9. Equips d'ESO i BTX. 3412657.

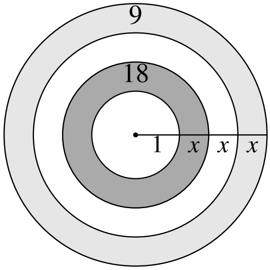
Passa N=117 del problema 8 i per tant serà $n = 13$, el divisor primer més gran de N. Hem de buscar el nombre de set xifres que estarà en el lloc 169è entre els que es poden formar com diu l'enunciat.

Primer de tot considerem ordenacions amb l'esquema 12*****, on ***** ha de ser una permutació de $\{3, 4, 5, 6, 7\}$ en què el 6 i el 7 no estiguin junts. En total hi ha 120 permutacions de cinc nombres, de les quals haurem de restar les que tenen junts el 6 i el 7. Si imaginem que permutem els quatre objectes $\{67, 3, 4, 5\}$ veurem que hi ha 24 permutacions que tenen el 6 i el 7 junts en aquest ordre; n'hi haurà 24 més amb el 7 i el 6 junts en l'ordre 76. Per tant són $120 - 2 \cdot 24 = 72$ les permutacions 12***** que compleixen les condicions de l'enunciat. Seguiran les 21*****,que naturalment també són 72 i després les del tipus 3 12 ****. Raonant de manera anàloga al que ja hem fet veurem que hi ha 12 permutacions de $\{4, 5, 6, 7\}$ en què el 6 i el 7 queden separats. A continuació hi haurà 12 permutacions més que interessen i que segueixen l'esquema 3 21 ****. Fins aquí ja tenim 168 permutacions. Quina és la següent que compleix l'enunciat? 3 4 12 657.

10. 60.

Si indiquem a, b les dimensions del rectangle interior, el nombre de peces blanques serà $a{\cdot}b$ i el de peces grises $2a+2b+4$. Si de l'equació $a{\cdot}b = 2a+2b+4$ aillem b obtenim $b = \dfrac{2a+4}{a-2} = 2 + \dfrac{8}{a-2}$ i, si tenim en compte que a i b han de ser nombres naturals trobarem les possibilitats $a = 3, 4, 6, 10$ que ens donen, respectivament $b = 10, 6, 4, 3$. Dels rectangles corresponents el més gran (tant pel que fa a l'àrea com el perímetre) és el que té dimensions 3×10 que implica que s'hauran fet servir 30 peces blanques i 30 de grises.

11. 44.



Les superfícies de les quatre zones de la diana, dividides per π, són $1, (1+x)^2 - 1, (1+2x)^2 - (1+x)^2, (1+3x)^2 - (1+2x)^2$. Si igualem la segona i la quarta trobarem $x = \dfrac{2}{3}$. En aquest cas les quatre superfícies estan en proporció a $1, \dfrac{16}{9}, \dfrac{8}{3}, \dfrac{32}{9}$.

Si a una superfície $\dfrac{32}{9} \cdot \pi$ se li assignen 9 punts, si fem les corresponents proporcionalitats inverses veurem que a una superfície de π unitats li corresponen 32 punts i a una superfície de $\dfrac{8}{3} \cdot \pi$ li corresponen 12 punts.

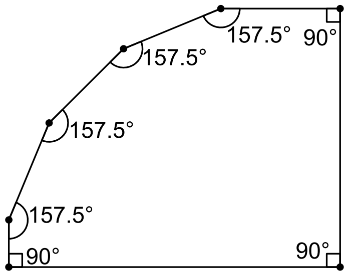
És interessant comentar que bastaria que l'enunciat donés una sola de les dades de 9 punts i 18 punts. Naturalment aquestes dades es donen de manera consistent amb l'assignació inversament proporcional.

12. 4.

Els set angles d'un heptàgon sumen 900°. Veurem tot seguit que el nombre màxim d'angles aguts o rectes que hi pot haver és 3.

Efectivament, si n'hi hagués 4 la suma d'aquests quatre angles seria com a màxim de 360° i, per tant, entre els altres tres haurien de sumar 540° o més cosa que implica que algun d'aquests angles (que no es poden considerar de 180° en un polígon) hauria de superar 180° i per tant l'heptàgon ja seria còncau.

Sí que és possible, en canvi, construir un heptàgon amb tres angles aguts o rectes. Per exemple amb tres angles rectes i quatre angles de $157,5°$.



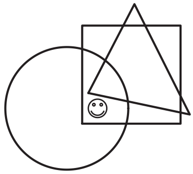
Cangur SCM 2009 Nivell 1

Qüestions de 3 punts

1. (*França*) Quin dels nombres següents és parell?

A) 2009 B) 2+0+0+9 C) $200 - 9$ D) 200×9 E) $200 + 9$

2. (*Àustria*) On es troba el ☺?



A) Dins del cercle i del triangle, però no dins del quadrat.
B) Dins del cercle i el quadrat, però no dins del triangle.
C) Dins del triangle i del quadrat, però no dins del cercle.
D) Dins del cercle, però no dins del cercle ni del triangle.
E) Dins del quadrat, però no dins del cercle ni del triangle.

3. (*Catalunya*) Quants nombres enters hi ha entre 2,009 i 19,03?

A) 16 B) 17 C) 14 D) 15 E) Més de 17

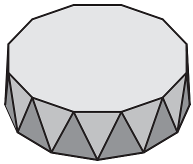
4. (*Rússia*) Quina és la quantitat més petita de xifres que cal esborrar en el nombre 12323314 per tal de trobar un nombre capicua?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5. (*Ucraïna*) Tenim tres capses: una de color blanc, una altra de color vermell i una darrera de color negre. Una d'elles és buida, en una hi ha una poma, i a l'altra una barra de xocolata. Trobeu de quin color és la capsa on hi ha la xocolata si sabem que la xocolata és a la capsa blanca o a la capsa vermella, i la poma no és ni a la capsa blanca ni a la capsa negra.

A) Blanca
B) Vermella
C) Negra
D) Vermella o negra
E) És impossible de saber

6. (*Catalunya*) Un *antiprisma* és un políedre que té dues bases ques són polígons iguals i cadascun dels vèrtexs d'una base s'uneix amb dos vèrtexs de l'altra base, de manera que les cares laterals són triangles. La figura mostra un antiprisma.
Quantes cares té un antiprisma en què les bases són polígons de 2009 costats?



A) 4020 B) 2011 C) 4018 D) 6027 E) 4022

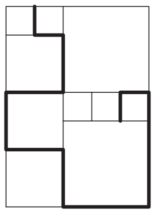
---

7. (*Croàcia*) S'ha construït un pont sobre un riu. El riu té una amplària de 120 metres. Un quart del pont està damunt la ribera esquerra del riu i un altre quart està damunt la ribera dreta del riu. Quant amida el pont?

A) 150 m B) 180 m C) 210 m D) 240 m E) 270 m

---

8. (*Eslovàquia*) En la figura hi ha quadrats de tres mides diferents. El costat del quadrat més petit amida 20 cm. Quina és la llargada de la línia gruixuda?



A) 380 cm B) 400 cm C) 420 cm D) 440 cm E) 1680 cm

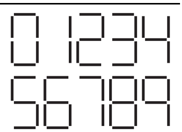
---

9. (*Rússia*) En una habitació hi ha gats i gossos. El nombre de potes dels gats és el doble que el nombre de nassos dels gossos. Aleshores el nombre de gats és:

A) El doble del nombre de gossos B) Igual al nombre de gossos
C) Quatre vegades el nombre de gossos D) $\frac{1}{4}$ del nombre de gossos
E) La meitat del nombre de gossos

---

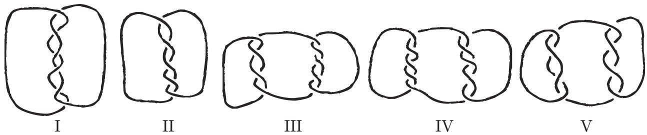
10. (*Rússia*) Amb bastonets idèntics es poden formar xifres tal com es veuen al dibuix. Direm que el pes d'un nombre és la quantitat de bastonets que calen per a formar-lo. Quin és el pes del nombre de dues xifres que pesa més?



A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

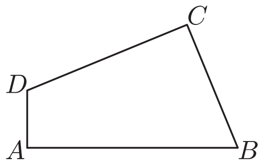
Qüestions de 4 punts

11. (*Suïssa*) En quines de les figures següents hi ha més d'un tros de corda?



A) I, III i V
B) III, IV i V
C) I, III, IV i V
D) En totes
E) En cap

12. (*Bielorrússia*) El quadrilàter $ABCD$ té els costats $AB = 11$, $BC = 7$, $CD = 9$ i $DA = 3$, i els angles A i C són rectes. Quina és l'àrea del quadrilàter?

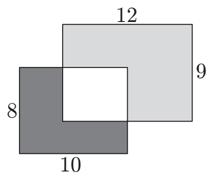


A) 48 B) 44 C) 30 D) 52 E) 60

13. (*Croàcia*) En un grup de dansa hi ha 39 nois i 23 noies. Cada setmana entren 6 nois i 8 noies més al grup. Al cap d'unes quantes setmanes el grup té el mateix nombre de nois que de noies. Quan això es compleix, quantes persones hi ha en total al grup de dansa?

A) 144 B) 154 C) 164 D) 174 E) 184

14. (*Holanda*) Dos rectangles de 8×10 i 9×12 se superposen en part l'un sobre l'altre. L'àrea de la part grisa fosca és 37. Quina és l'àrea de la part grisa clara?

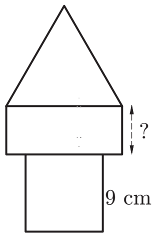


A) 60 B) 62 C) 62,5 D) 64 E) 65

15. (*Brasil*) Es posen vuit cartes numerades de l'1 al 8 dins de dues caixes A i B, de manera que la suma dels valors numèrics de les cartes de les dues caixes dóna el mateix. Si només hi ha 3 cartes a la caixa A, aleshores podem estar segurs que a la caixa B:

A) Hi ha tres cartes amb nombre imparell
B) Hi ha quatre cartes amb nombre parell
C) No hi ha el nombre 1
D) Hi ha el nombre 2
E) Hi ha el nombre 5

16. (*Eslovàquia*) La *torre* del dibuix està formada per tres figures: un quadrat, un rectangle i un triangle equilàter. Les tres figures tenen el mateix perímetre. El costat del quadrat fa 9 cm. Quina és la longitud del costat del rectangle que està senyalat?



A) 4 cm B) 5 cm C) 6 cm D) 7 cm E) 8 cm

17. (*Itàlia*) Volem omplir una caixa de $40 \times 40 \times 60$ amb cubs iguals. Quin és el nombre mínim de cubs que es necessiten?

A) 6 B) 12 C) 46 D) 12000 E) 96000

18. (*Brasil*) En Francesc comença a llegir un llibre de 290 pàgines un diumenge. Cada diumenge llegeix 25 pàgines i els altres dies, 4 pàgines. Quants dies haurà emprat per a llegir tot el llibre?

A) 5 B) 46 C) 40 D) 35 E) 41

19. (*Croàcia*) L'Antoni, la Benazir, en Carles i la Diana han quedat als quatre primers llocs d'un torneig d'escacs. Si sumes els números que indiquen el lloc que han ocupat l'Antoni, la Benazir i la Diana, s'obté el nombre 6. S'obté el mateix nombre si sumes els llocs ocupats per la Benazir i en Carles. Qui ha quedat en primer lloc, si la Benazir s'ha classificat per davant de l'Antoni?

A) Antoni B) Benazir C) Carles D) Diana E) No es pot saber

20. (*Suècia*) La Isabel agafa 2009 peces quadrades iguals i les posa totes de manera que formen un únic rectangle del tot ple de peces no superposades. Quants rectangles diferents pot construir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

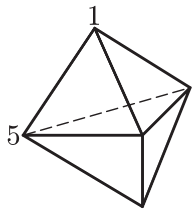
Qüestions de 5 punts

21. (*Ucraïna*) Tenim quatre afirmacions sobre un nombre enter positiu N:
- N és divisible per 5.
- N és divisible per 11.
- N és divisible per 55.
- N és més petit que 10.

Sabem que dues de les afirmacions són certes i que les altres dues són falses. Aleshores N és el nombre:

A) 1 B) 5 C) 10 D) 11 E) 55

22. (*Mèxic*) La figura mostra un sòlid format per 6 cares triangulars. Hi ha un nombre a cada vèrtex. Per cada cara, consideram la suma dels tres nombres situats als vèrtexs de la cara. Si totes les sumes donen el mateix i dos dels nombres són 1 i 5 com es mostra a la figura, quina és la suma dels 5 nombres?

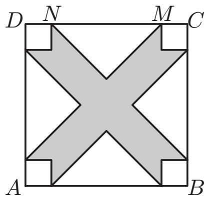


A) 9 B) 12 C) 17 D) 18 E) 24

23. (*Catalunya*) Les habitacions d'un hotel estan numerades amb tres xifres. La primera indica el pis i les altres dues el número de l'habitació. Per exemple, 325 indica l'habitació número 25 del tercer pis. L'hotel té un total de 5 pisos numerats de l'1 al 5 amb 35 habitacions cadascun. Al tercer pis les habitacions van de la 301 a la 335. Quantes vegades s'usa la xifra 2 per a numerar totes les habitacions?

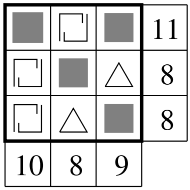
A) 60 B) 65 C) 95 D) 100 E) 105

24. (*Estònia*) $ABCD$ és un quadrat amb els costats de llargària 10 cm. La distància del punt N al punt M és 6 cm. Totes les regions blanques representen triangles isòsceles iguals o quadrats iguals. Calcula l'àrea de la regió grisa dins del quadrat $ABCD$.



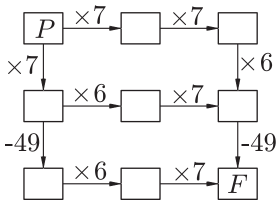
A) 42 cm^2 B) 46 cm^2 C) 48 cm^2 D) 52 cm^2 E) 58 cm^2

25. (*Regne Unit*) Es dóna el total de cada fila i de cada columna. Quin és el valor de ■ + □ − △?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

26. (*Catalunya*) El Cangur pensa un nombre enter i el col·loca a la caixa P. Aleshores segueix un dels següents camins indicats per fletxes i realitza les operacions corresponents. Pot trobar el Cangur el nombre 2009 en arribar a la caixa F?



A) Sí, anant pels tres camins possibles.

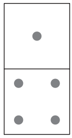
B) Sí, anant per dos dels camins i començant amb el mateix nombre a ambdós camins.

C) Sí, anant per dos dels camins, i començant amb un nombre diferent en cada camí.

D) Sí, anant només per un camí possible.

E) No, no és possible.

27. (*Itàlia*) Un conjunt complet de 28 peces de dòmino conté cada combinació possible de dos nombres entre 0 i 6, ambdós inclusivament, incloent-hi dues vegades el mateix nombre. Quants punts hi ha, en total, en les 28 peces?



A) 84 B) 105 C) 126 D) 147 E) 168

---

28. (*Brasil*) En una taula 4×2, hi ha dos nombres escrits a la primera fila. Els nombres de la fila següent es calculen fent la suma i la diferència dels nombres que hi ha en la fila anterior (vegeu l'exemple del dibuix). Si en una taula 7×2 emplenada de la mateixa manera, els nombres de la darrera fila són 96 i 64, quant val la suma dels nombres de la primera fila?

10	3
13	7
20	6
26	14

A) 8 B) 10 C) 12 D) 20 E) 24

---

29. (*Itàlia*) En el país de Peugraciós, tothom té el peu esquerre un o dos números més gran que el peu dret. Les sabates, però, es venen en parelles del mateix número. De cara a estalviar, un grup d'amics decideixen comprar sabates junts: compren sabates i en sobren dues: una sabata del número 36 i l'altra del número 45. Quants d'amics hi ha com a mínim en el grup?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

---

30. (*Mèxic*) Volem acolorir els quadrats de la graella fent servir colors A, B, C i D, de manera que dos quadrats veïns no tenguin el mateix color. (Quadrats que comparteixen un vèrtex es consideren veïns.) Hem acolorit alguns quadrats com s'indica a la figura. De quin color podem pintar el quadrat gris?

A	B		C	D

A) A B) B C) C D) D E) Hi ha dues possibilitats diferents

Premis i mencions

Primer premi

Eric Milesi Vidal (Pare Manyanet, Barcelona), 150.0 punts

Premis per al pòdium

Xavier Cabanes Bosacoma (IES Maragall, Barcelona), 146.25 punts
Joan Prunera Olivó (IES Escola Industrial, Sabadell), 143.75 punts

Premis de categoria A

David Balaghi Buil (Aula Escola Europea, Barcelona), 142.0 punts
Marcel Catà Villa (IES Damià Campeny, Mataró), 141.25 punts
Júlia Alsina Oriol (IES Jaume Callís, Vic)
i Oscar Roldán Blay (València), 138.75 punts

Premis de categoria B, ex aequo

Gabriel Comerón Castillo (IES d'Argentona, Argentona),
Jaume De Dios Pont (Tecnos, Terrassa),
Aran García Vidal (IES Lluís de Peguera, Manresa),
Aleix Soriano de Haro (Nuestra Señora del Rosario, Barcelona) i
Andreu Viñets Alonso (IES Vil·la Romana, La Garriga), 135.0 punts

Premis de categoria C

Gerard Moreno Giménez (IES Joan Amigó i Callau, L'Espluga de Francolí), 134.75 punts
Xavier Couñago González (IES L'Alzina, Barcelona)
i Lluís Isern López (IES Gabriel Ferrater i Soler, Reus), 133.75 punts
Darío Nieuwenhuis Nivela (Aula Escola Europea, Barcelona)
i Celia Traver Abella (IES Ramón Cid, Benicarló), 132.5 punts

Premis de categoria D

Roger Laguarta Alapont (IES Lluís de Peguera, Manresa), 131.25 punts
Roser Pérez Dalmau (IES de Palamós, Palamós), 131.0 punts
Jordi Barceló Mercader (Jesús Maria, Badalona), 130.0 punts

Mencions fins a l'1% de les millors puntuacions

Miquel Rossy Sesé (La Farga, Sant Cugat del Vallès), 129.75 punts
Clara Carrera Moreno (IES Angeleta Ferrer, Sant Cugat), 128.75 punts
Irene Peralta Garcia (IES Vil·la Romana, La Garriga), 128.25 punts
Albert Comas Llagostera (IES Montsacopa, Olot),
Adrià Fernández Díaz (IES Consell de Cent, Barcelona)
i Joan Grau Leguía (IES Les Corts, Barcelona), 127.5 punts
Daniel García García (Nuestra Señora del Rosario, Barcelona), 126.25 punts
Adrià Duran Sidera (IES Castell d'Estela, Amer), 126.0 punts
Celia Franch López (Aula Escola Europea, Barcelona)
i Albert Sancristòfol Parés (IES Pius Font i Quer, Manresa), 125.0 punts
Alfons Ahicart Villach (IES Alfonso XIII, Vall d'Alba),
Marc Balsà Diaz (Lestonnac-l'Ensenyança, Lleida),
Roberto Mateo García (IES Joanot Martorell, Valencia)
i Aleix Villamor Orra (Sagrat Cor de Jesús, Vic), 123.75 punts
Víctor Ibáñez Molina (IES Serra d'Espadà, Onda), 123.5 punts
Jordi Clua Miras (Regina Carmeli, Rubí), 123.25 punts
Vera Cuervo Rojman (IES Leonardo da Vinci, Sant Cugat del Vallès),
Marc Sánchez Alfonso (Aula Escola Europea, Barcelona),
Oriol Esquivias Bautista de Lisbona (Escola Pia Nostra Senyora, Barcelona),
i David Portabella de Predo (Escola Pia de Mataró, Mataró), 122.5 punts
Dolça Tellols Asensi (IES Vicent Sos Baynat, Castelló de la Plana)
i Gerard Fabregó Serrat (Sagrats Cors, Centelles), 122.25 punts
Eduardo Atao Salazar (Sagrado Corazón de Jesús, Terrassa), 122.0 punts
David Masip Bonet (IES Pons d'Icart, Tarragona), 121.75 punts
Eloi Bigas Vila (IES Costa i Llobera, Barcelona),
Nicolas Blasco Arnanz (IES Vicent Sos Baynat, Castelló de la Plana)
i Marc Ballbé Ferrero (Aula Escola Europea, Barcelona), 121.25 punts
Adrià Gil Sorribes (IES Lluís Domènech i Montaner, Reus),
Pau Moncusí Pino (IES Gabriel Ferrater i Soler, Reus)
i Marc Gort Mas (Brianxa, Tordera), 121.0 punts
Joan Estruch García (Abecé, Gandia), 120.75 punts
Tiaré Galvez Calicó (Thau, Barcelona),
Lluís Garcia Pons (IES Llobregat, Sallent)
i Jordi Piqué Sellés (IES d'Almenar, Almenar), 120.0 punts
David Sesto Castilla (IES Torre Roja, Viladecans),
Nil Ramon Cañellas (IES Fonts de la Glorieta, Alcover)
i Ariadna Alarcón Calvet (La Salle, Girona), 119.75 punts

Marc Falcó Pallarès (IES Santiago Sobrequés i Vidal, Girona)
i Pol Olivella Farell (Aula Escola Europea, Barcelona), 119.5 punts
Erik Martínez Ramírez (Sagrada Família-Horta, Barcelona),
Marc Far Ruiz (Montessori-Palau, Girona),
Claudia Álvarez Pujol (Sant Pau, Barcelona),
Oriol Argelagós López (IES de Terrassa, Terrassa),
Arcadi Garcia Rius (IES Benigasló, La Vall d'Uixò),
Jordi Solà Montserrat (IES Narcís Oller, Valls),
Pau Pérez Casas (IES d'Auro, Santpedor),
i Xavier Jarque Vilella (IES Gabriel Ferrater, Reus), 118.75 punts
Arnau Escapa Farrés (IES Pau Vila, Sabadell),
i Àlex Pujol Garcia (IES Màrius Torres, Lleida), 118.25 punts

Cangur SCM 2009 Nivell 1

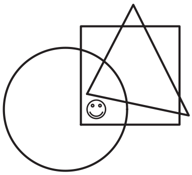
Qüestions de 3 punts. Solucions

1. D. 1800.

Els nombres donats són 2009, 11, 191, 1800, 209. És clar que l'únic que és parell és el quart.

2. B.

Una observació acurada mostra que el ☺ es troba dins del cercle i del quadrat, però no dins del triangle.



3. B. 17.

Entre 2,009 i 19,03 hi ha els nombres enters des del 3 fins al 19, inclosos, cosa que representa 17 nombres enters.

4. C. 3.

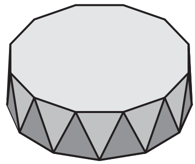
S'observa que el 4 no pot aparèixer en el nombre capicua que busquem i que només traient una altra xifra no aconseguim un capicua. Ara bé, si traiem el primer 2, l'últim 3 i el 4 o també si traiem el 4 i els dos 2 aconseguim el que ens demanaven.

5. A. Blanca.

Si sabem que la poma no és ni a la capsa blanca ni a la capsa negra és que la poma és a la capsa vermella. Combinant aquesta condició amb l'altra que s'enuncia, a saber, que la xocolata és a la capsa blanca o a la capsa vermella deduim que la xocolata és a la capsa blanca.

6. A. 4020.

Les cares de l'antiprisma són: Un triangle per cada costat de la base superior, un triangle per cada costat de la base inferior i les dues bases. En total $2 \times 2009 + 2 = 4020$.

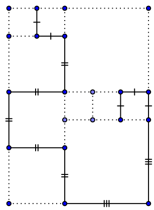


7. D. 240 m.

La part del pont que queda sobre el riu és $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Si la meitat del pont són 120 m, la longitud total és de 240 m.

8. C. 420.

Les mides dels costats dels quadrats són 20, 40 i 60 cm. La línia gruixuda està formada per 5 costats de quadrat petit, 5 costats de quadrat mitjà i 2 costats de quadrat gros. La llargada total és doncs $5 \times 20 + 5 \times 40 + 2 \times 60 = 420$.

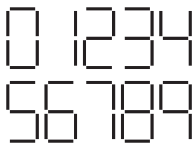


9. E. La meitat del nombre de gossos.

Com que cada gos té un nas, l'enunciat equival a dir que el nombre de potes dels gats és el doble que el nombre de gossos. És a dir el quàdruple del nombre de gats és igual al doble del nombre de gossos. I d'aquí es dedueix ràpidament la solució enunciada.

10. E. 14.

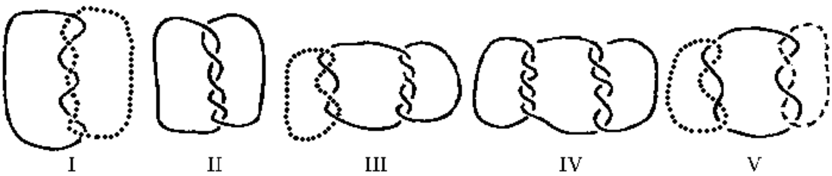
La xifra que pesa més és el 8, que és l'única que té un pes de 7. Per tant el nombre de dues xifres que pesa més és el 88, que pesa 14.



Qüestions de 4 punts. Solucions

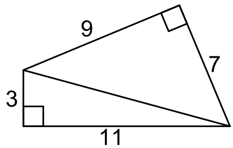
11. A. I, III i V.

La figura mostra que en l'esquema I i en el III hi ha dos trossos de corda enllaçats i en el V, tres.



12. A. 48.

El quadrilàter està format juxtaposant dos triangles rectangles. L'àrea d'un triangle rectangle es pot obtenir multiplicant els dos catets i dividint per dos. L'àrea buscada serà doncs $\frac{63}{2}+\frac{33}{2}=48$.

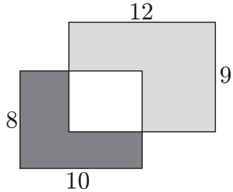


13. D. 174.

Actualment hi ha 16 nois més que noies. Si cada setmana van entrant dues noies més que nois fan falta 8 setmanes perquè s'igualin el nombre de noies i el de nois. Durant aquestes setmanes s'hauran incorporat 48 nois i 64 noies, que fan un total de 87 nois i 87 noies, és a dir 174 persones.

14. E. 65.

L'àrea del rectangle de 8×10 és 80. Si la part de color gris fosc té àrea 37 l'àrea del rectangle blanc és $80-37=43$. L'àrea del rectangle de 9×12 és 108. Si li restem la part blanca tindrem l'àrea demanada: $108-43=65$.



15. D. A la caixa B hi ha el 2.

Com que la suma dels nombres de l'1 al 8 és 36, les cartes de cada caixa hauran de sumar 18. Com que han de sumar un nombre parell, les tres cartes de la caixa A podran ser 3 cartes parells o 1 carta parell i 2 imparells, i per tant a la caixa B hi haurà, segons els dos casos, 1 carta parell i 4 imparells o bé 2 i 2. Estem segurs, doncs, que les opcions de resposta A) i B) no són correctes. En el primer cas les cartes de la caixa A només poden ser el 4, el 8 i el 6. En el segon cas poden ser $8+7+3$ o bé $7+6+5$. Per tant la carta 1 segur que és a la caixa B (i l'opció de resposta C) és incorrecta); la carta 2 segur que és a B (resposta correcta) i, tot i que hi pot ser, no podem estar segurs que el 5 estigui a B perquè també pot ser que no hi sigui.

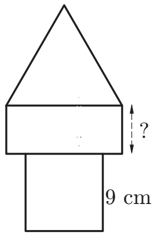
16. C. 6 cm.

El perímetre de cada figura serà 36 cm, com el del quadrat.

El costat del triangle serà, doncs, $\frac{36}{3} = 12$ cm.

El rectangle central té dos costats de 12 cm.

Cadascun dels altres dos farà $\frac{36 - 2 \cdot 12}{2} = 6$ cm.



17. B. 12.

Per fer servir la mínima quantitat de cubs hem de procurar que tinguin l'aresta el més gran possible, que haurà de ser el màxim comú divisor de 40 i 60, és a dir 20. Si omplim la caixa amb cubs d'aresta 20 necessitem $2 \times 2 \times 3$ cubs.

18. E. 41.

De diumenge a dissabte llegeix $25 + 6 \cdot 4 = 49$ pàgines. Si dividim 290 per 49 veurem que després de 5 setmanes li queden per llegir 45 pàgines, que li ocuparan exactament de diumenge a divendres. En total, doncs, haurà emprat $7 \cdot 6 + 6 = 41$ dies per llegir tot el llibre.

19. D. Diana.

Com que els lloc en què han quedat sumen 6 resulta que Antoni, Benazir i Diana han quedat en els tres primers llocs i, per tant, Carles serà el 4t. Com que les posicions de Carles i Benazir sumen 6, ella serà la 2a. Com que Benazir s'ha classificat més endavant que l'Antoni, ell serà el 3r i Diana la guanyadora.

20. A. 3.

Com que la descomposició en factors primers de 2009 és $2009 = 7^2 \cdot 41$ resulta que les úniques descomposicions de 2009 com a producte de dos factors, sense tenir en compte l'ordre, són $1 \cdot 2009$, $7 \cdot 287$ i $49 \cdot 41$, que ens determinen els tres possibles rectangles.

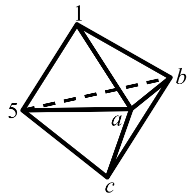
Qüestions de 5 punts. Solucions

21. B. 5.

La primera i la segona alhora no poden ser certes perquè també ho seria la tercera i, recíprocament, la tercera no pot ser certa perquè també ho serien la primera i la segona. Per tant forçosament és certa la quarta afirmació i per tant no pot ser-ho la segona i sí que ho és la primera.

22. C. 17.

Els nombres de les cares superiors sumen $6+a$, $6+b$ i $1+a+b$. Si totes les cares han de sumar igual es dedueix en primer lloc que $a=b$ i tot seguit que $a=b=5$ i que la suma de cada cara superior és 11. Les cares inferiors sumen $10+c$ i, doncs, $c=1$. La suma dels cinc nombres és 17.

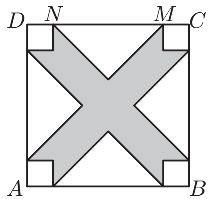


23. E. 105.

S'hauran fet servir 35 dosos per la primera xifra de cada habitació del segon pis i, a més, 14 dosos en cada pis per escriure les dues últimes xifres (en les habitacions $\star 02, \star 12, \star 20, \star 21, \star 22, ..., \star 29, \star 32$). En total, doncs, $5 \cdot 14 + 35 = 105$.

24. C. 48 cm^2.

Cada parella de triangles isòsceles poden compondre un quadrat de diagonal 6 cm, del qual podem calcular l'àrea "com si fos un rombe": $\frac{6 \cdot 6}{2}$, i per tant entre els quatre triangles isòsceles abastaran 36 cm^2. El costat de cada quadradet dels racons és de 2 cm. Per tant entre tots quatre tenen àrea $4 \cdot 2^2 = 16$. L'àrea demanada és $100 - 36 - 16 = 48$.



25. C. 6.

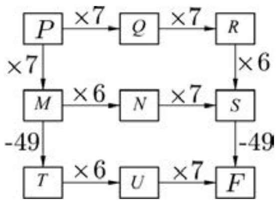
Si sumem la fila superior i la columna de l'esquerra dóna 21 i hi tenim tres vegades □+■. Per tant □+■ =7. Si ara mirem la fila inferior deduirem de seguida que el triangle ha de ser igual a 1. Per tant ■+□−△ = 6.

■	□	■	11
□	■	△	8
□	△	■	8
10	8	9	

26. B. Anant per dos dels camins i començant amb el mateix nombre.

Si observem amb atenció veurem que pels dos camins $PQRS$ i $PMNS$ s'arriba a la casella S amb el resultat de multiplicar per 294 el nombre amb què havíem començat. Perquè després arribem a F amb el 2009 caldria que a S hi hagués el nombre $2009 + 49 = 2058$ que és $2058 = 294 \cdot 7$. Per tant començant amb el 7, tant si anem per $PQRS$ com per $PMNS$ acabem amb el 2009.

Si examinem el tercer camí possible, $PMTU$, veurem que no és possible aconseguir el 2009 ja que, perquè fos així, a la casella T hauríem de tenir un nombre enter que multiplicat per $6 \times 7 = 42$ donés 2009, però 42 no és un divisor de 2009.



27. E. 168.

Cada número del 0 al 6 apareix exactament en set peces del dòmino i entre aquestes hi ha la peça doble. Per tant, cada número apareix exactament vuit vegades i la suma serà $8 \cdot (0 + 1 + 2 + ... + 6) = 8 \cdot 21 = 168$.

Una altra manera de raonar que cada número surt 8 vegades és la consideració que hi ha 8 peces, per tant 56 nombres i cada nombre dels 7 possibles (del 0 al 6, inclosos) ha de sortir el mateix nombre de vegades, $\dfrac{56}{7} = 8$.

28. D. 20.

So continueu la taula que es mostra a la dreta veureu que a la setena fila apareixen els nombres $8a$ i $8b$. Per tant si hi tenim 96 i 64 és que a la fila inicial hi havia 12 i 8, que sumen 20.

a	*b*
a+b	*a-b*
2a	*2b*
2a+2b	*2a-2b*
4a	*4b*
⋮	⋮

També es podria raonar ”a la inversa”. Per passar de cada fila a la superior sumem els dos nombres i dividim per 2 i posem el resultat a la casella de dalt a l'esquerra; restem el nombre de l'esquerra menys el de la dreta i ho dividim per dos i ho posem a la casella de dalt a la dreta. Si apliquem aquest procediment successivament també arribem, naturalment als valors 12 i 8.

29. A. 5.

El parell més petit que han comprat és del número 36 i el més gran del 45. Entre el 36 i el 45 hi ha nou números de diferència. Per tal que el nombre d'amics sigui mínim, les diferències entre el peu dret i l'esquerre d'aquests amic ha de ser el màxim de vegades 2, és a dir quatre vegades 2 i una vegada 1. Això fa que el mínim de persones sigui 5.

Un exemple concret, on amb (a, b) s'indiquen les mides del peu dret i el peu esquerre, seria el d'una colla de 5 amics amb aquests números de peu (36,38), (38,40), (40,42), (42,44), (44,45) que haurien comprat 6 parells de sabates, un parell de cada un dels números 36, 38, 40, 42, 44 i 45.
Els números poden variar d'un exemple a un altre però, en tot cas, per passar del 36 al 45 amb salts d'un o dos el mínim s'assoleix quan es fa un salt d'1 i quatre de 2.

30. A.

A la casella buida de la primera fila hi podem posar A o D.
Si hi posem A podem observar que a sota d'aquesta A només hi pot anar D i que l'única manera de completar la segona fila és $DCDBA$ i, semblantment, veurem que la tercera fila ha de ser $ABACD$ i la quarta $DCDBA$.
Si a la casella buida de la primera fila hi posem D l'única manera d'omplir les files successives és $DCABA$, $ABDCD$ i $DCABA$.
En tots dos casos la casella grisa queda plena amb la lletra A.

A	B		C	D

Cangur SCM 2009 Nivell 2

Qüestions de 3 punts

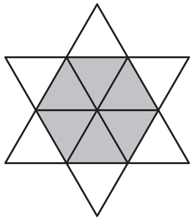
1. (*França*) Quin dels nombres següents és parell?

A) 2009 B) $2+0+0+9$ C) $200-9$ D) 200×9 E) $200+9$

2. (*Hongria*) En una festa hi havia 4 nois i 4 noies. Els nois només van ballar amb noies i les noies només van ballar amb nois. Després van preguntar a tothom amb quantes persones havien ballat. Els nois van contestar: 3, 1, 2, 2. Tres de les noies van dir: 2, 2, 2. Quin nombre va dir la quarta noia?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

3. (*Eslovàquia*) L'estrella del dibuix està formada per 12 triangles equilàters petits. El perímetre de l'estrella és de 36 cm. Quin és el perímetre de l'hexàgon gris?

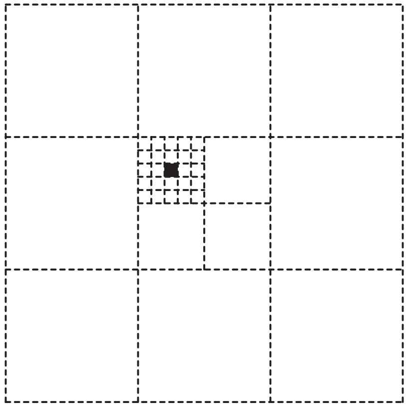


A) 12 cm B) 6 cm C) 24 cm D) 30 cm E) 18 cm

4. (*Holanda*) En Harry reparteix paquets al carrer Major. Ha de lliurar un paquet a cada una de les cases que tenen un nombre senar i de manera correlativa, començant per la que porta el número 15 i acabant per la que porta el número 53. A quantes cases ha de lliurar paquets en Harry?

A) 19 B) 20 C) 27 D) 38 E) 53

5. (*Estats Units d'Amèrica*) L'àrea del quadrat gran és 1. Quina és l'àrea del quadrat petit negre?



A) $\dfrac{1}{100}$

B) $\dfrac{1}{300}$

C) $\dfrac{1}{600}$

D) $\dfrac{1}{900}$

E) $\dfrac{1}{1000}$

6. (*Holanda*) El producte de quatre enters positius diferents és 100. Quant val la seva suma?

A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 20

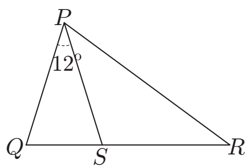
7. (*Rússia*) En una habitació hi ha gats i gossos. El nombre de potes dels gats és el doble que el nombre de nassos dels gossos. Aleshores el nombre de gats és:

A) La meitat del nombre de gossos
B) Igual al nombre de gossos
C) El doble del nombre de gossos
D) $\dfrac{1}{4}$ del nombre de gossos
E) Quatre vegades el nombre de gossos

8. (*Ucraïna*) Un ascensor té una capacitat per a 12 adults o 20 nins. Quants nins poden anar com a màxim amb 9 adults?

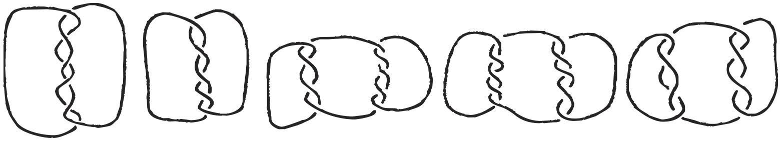
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

9. (*Regne Unit*) A la figura de la dreta, QSR és una línia recta. $\widehat{QPS} = 12°$ i $PQ = PS = RS$. Quant mesura l'angle $\widehat{QPR}$?



A) 42° B) 60° C) 36° D) 84° E) 54°

10. *(Suïssa)* En quines de les figures següents hi ha més d'un tros de corda?



I II III IV V

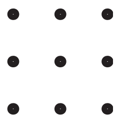
A) I, III i V
B) III, IV i V
C) I, III, IV i V
D) En totes
E) En cap

Qüestions de 4 punts

11. (*Rússia*) Per quants nombres enters positius necessitem la mateixa quantitat de xifres per a escriure el seu quadrat que per a escriure el seu cub?

A) 0 B) 3 C) 4 D) 9 E) Una quantitat infinita

12. (*Bielorrússia*) Quin és el nombre mínim de punts que cal llevar de la figura, de manera que no hi quedin tres punts alineats?

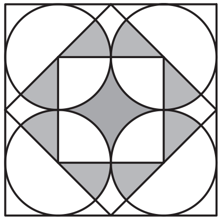


A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 7

13. (*Rússia*) En Nicolau ha mesurat els 6 angles de dos triangles, un d'ells acutangle i l'altre obtusangle. Recorda quatre d'aquests angles: 120°, 80°, 55° i 10°. Quin és l'angle més menut del triangle acutangle?

A) 5° B) 10° C) 45° D) 55° E) No és possible determinar-lo

14. (*Regne Unit*) Quina part del quadrat exterior està ombrejada?

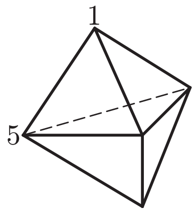


A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{\pi}{12}$ C) $\frac{\pi+2}{16}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{1}{3}$

15. (*Ucraïna*) En una illa remota unes quantes persones sempre diuen la veritat i la resta menteixen sempre. 25 persones d'aquesta illa estan col·locades en fila índia. La primera persona de la cua diu que totes les altres són mentideres. Totes les altres persones de la cua diuen que la persona que tenen al davant és mentidera. Quantes persones mentideres hi ha a la cua?

A) 0 B) 12 C) 13 D) 24 E) És impossible saber-ho

16. (*Mèxic*) La figura mostra un sòlid format per 6 cares triangulars. Hi ha un nombre a cada vèrtex. Per cada cara, consideram la suma dels tres nombres situats als vèrtexs de la cara. Si totes les sumes donen el mateix i dos dels nombres són 1 i 5 com es mostra a la figura, quina és la suma dels 5 nombres?



A) 12 B) 24 C) 18 D) 9 E) 17

17. (*Bielorrússia*) En la igualtat $\frac{E \cdot I \cdot G \cdot H \cdot T}{F \cdot O \cdot U \cdot R} = T \cdot W \cdot O$ lletres distintes signifiquen dígits distints, mentre que lletres iguals signifiquen dígits iguals. Quants resultats diferents pot donar el producte $T \cdot H \cdot R \cdot E \cdot E$?

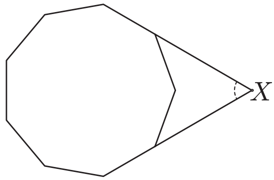
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

18. (*Mèxic*) Volem pintar els quadrats de la taula utilitzant els colors A, B, C i D de tal manera que els quadrats veïns no tinguin el mateix color (els quadrats que comparteixen un vèrtex es consideren veïns). Alguns dels quadrats ja han estat pintats amb els colors com es mostra. Quins són els possibles colors per al quadrat gris?

A	B			
C	D			
		B		
B				

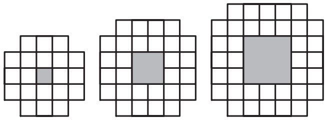
A) A o B B) C o D C) Només D D) Només C E) A, B, C o D

19. (*Regne Unit*) El diagrama ens mostra un eneàgon regular (un polígon de 9 costats). Quant mesura l'angle X?



A) 40°   B) 45°   C) 50°   D) 55°   E) 60°

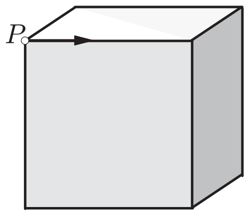
20. (*Estònia*) Es mostren els tres primers elements d'una successió. Sense comptar el forat quadrat, representat per la regió grisa, quants quadrats unitaris es necessiten per a construir el desè element d'aquesta successió?



A) 76   B) 80   C) 84   D) 92   E) 100

Qüestions de 5 punts

21. (*Holanda*) Començant des del punt P, ens movem al llarg de les arestes per l'exterior del cub, començant en la direcció de la fletxa. Al final de l'aresta hem de triar entre anar cap a l'esquerra o cap la dreta. A la fi de la segona aresta hem de triar de nou, i així successivament. Elegim alternativament dreta i esquerra. Quantes arestes hem de recórrer per tornar al punt P per primera vegada?



A) 2   B) 4   C) 6   D) 9   E) 12

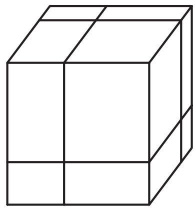
22. (*Ucraïna*) Quants nombres de deu xifres podem compondre fent servir només les xifres 1, 2 i 3 en els quals la diferència entre dues xifres consecutives siga 1?

A) 4   B) 8   C) 16   D) 32   E) 64

23. (*Ucraïna*) Tots els divisors d'un nombre N, diferents de N i de 1, s'escriuen en una línia. Un cop fet això, veiem que el més gran d'aquests divisors és 45 vegades més gran que el més petit. Quants nombres N hi ha que compleixin aquesta condició?

A) 0   B) 1   C) 2   D) Més de 2   E) És impossible determinar-ho

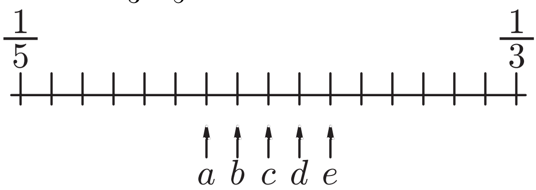
24. (*Regne Unit*) En un cub gros es fan tres talls per a formar vuit prismes més petits. Quina relació hi ha entre l'àrea *total* d'aquests vuit prismes petits i l'àrea del cub original?



A) 1 : 1 B) 2 : 1 C) 3 : 2 D) 4 : 3 E) 4 : 1

---

25. (*Holanda*) Les fraccions $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{5}$ estan situades en la recta numèrica:



Quin punt correspon a la fracció $\frac{1}{4}$?

A) a B) b C) c D) d E) e

---

26. (*Catalunya*) Un quadrat s'ha disseccionat en 2009 quadrats que tenen la mida del costat entera. Quina és la mida més curta possible del costat del quadrat original?

A) 44
B) 45
C) 46
D) 503
E) No és possible disseccionar un quadrat en 2009 quadrats de costat enter.

---

27. (*Ucraïna*) En el quadrilàter $PQRS$, $PQ = 2006$, $QR = 2008$, $RS = 2007$ i $SP = 2009$. Quins dels angles interiors del quadrilàter han de ser necessàriament menors de 180°?

A) P, Q, R B) P, R, S C) P, Q, S D) Q, R, S E) P, Q, R, S

---

28. (*Estònia*) Si superposo un quadrat de 6 cm $\times$ 6 cm sobre un triangle, puc recobrir fins a un 60 % del triangle. Si superposo el triangle sobre el quadrat, puc recobrir fins a $\frac{2}{3}$ del quadrat. Quina és l'àrea del triangle?

A) $22\frac{4}{5}$ cm^2 B) 24 cm^2 C) 36 cm^2 D) 40 cm^2 E) 60 cm^2

---

29. (*Lituània*) En Divendres (el company de Robinson Crusoe) va escriure, un al costat de l'altre, uns quants nombres enters positius diferents, tots ells més petits que 11. Robinson Crusoe se'ls va mirar i es va adonar amb satisfacció que en cada parella de nombres veïns un d'ells era divisible per l'altre. Com a màxim, quants nombres havia escrit en Divendres?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

---

30. (*Rússia*) En un triangle ABC, l'angle B és igual a 20° i l'angle C és igual a 40°. La longitud de la bisectriu de l'angle A és 2. Quant val $BC - AB$?

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 2

Premis i mencions

Primer premi

Adrià Balcázar Castell (Fundación Escuela Suiza, Barcelona), 130.0 punts

Premis per al pòdium

Gerard Feliu Montesinos (La Salle, Girona), 127.5 punts
Rafael Borràs Pernas (IES Francesc Ribalta, Castelló de la Plana), 125.0 punts

Premis de categoria A

Alejandro Sánchez Guerrero (IES Angeleta Ferrer, Sant Cugat), 122.25 punts
Petar Hlad (Joan Pelegrí, Barcelona), 121.25 punts
Ferran Alet Puig (Aula Escola Europea, Barcelona), 120.75 punts
Teresa Franco Leyva (Aula Escola Europea, Barcelona), 120.0 punts

Premi de categoria B

Ferran Enfedaque Moreno (Sadako, Barcelona), 119.75 punts
Eduard Vázquez Espín (IES Montserrat Roig, Sant Andreu de la Barca)
i Marc Dalmasso Blanch (Claver, Lleida), 117.5 punts
Sergi Cebrián Gres (Fundación Escuela Suiza, Barcelona), 117.25 punts

Premis de categoria C

Alberto Montes Gómez (IES Sant Quirze del Vallès), 114.75 punts
Martí Ribalta Albuixech (IES Francesc Ribalta, Solsona), 112.5 punts
Stamen Miroslavov Minkov (IES Margarida Xirgu, L'Hospitalet de Llobregat)
i Guim Olivé Oller (IES Jaume Huguet, Valls), 111.25 punts
Óscar Lozano Pérez (Aula Escola Europea, Barcelona), 111.0 punts

Premis de categoria D

Rafael Alvaro Fuentes Llopis (Aula Escola Europea, Barcelona), 110.75 punts
Jorge Peña Queralta (IES L'Almadrava, Benidorm), 108.75 punts
David Gil Solsona (IES Bovalar, Castelló de la Plana) i
Javier Cristín Redondo (Sagrada Família-Horta, Barcelona), 108.5 punts

Mencions fins a l'1% de les millors puntuacions

Carles Seara Mora (IES Ernest Lluch, Barcelona),
Hong Chen (IES Euclides, Pineda de Mar) i
Manel Baradad Jurjo (Claver, Lleida), 105.0 punts
Pilar Puig Cortada (Aula Escola Europea, Barcelona) i
Elvira Martínez Duró (Sagrat Cor, Amposta), 104.75 punts
Cèlia Garriga Bonnín (IES Joan Brudieu, La Seu d'Urgell) i
David Luna Pérez (Sant Miquel, Barcelona), 103.75 punts
Alejandro Serés Cabasés (IES Samuel Gili i Gaya, Lleida) i
Arnau Cameron Torra (Viaró, Sant Cugat del Vallès), 103.5 punts
Jordina Francès i de Mas (IES Eugeni Xammar, L'Ametlla del Vallès),
Jie Luan (IES Montsacopa, Olot) i
Marc Clupés Peró (Escola Pia de Mataró, Mataró), 103.0 punts
Pere Alcon Quer (Nuestra Señora de Montserrat, Olesa), 102.5 punts
Borja Sánchez Zarate (Viaró, Sant Cugat del Vallès),
Jesús Bach Marquès (IES Aubenç, Oliana) i
Jordi Vila Pérez (IES Alexandre Deulofeu, Figueres), 102.25 punts
Carles Albiol Alcalde (IES La Llauna, Badalona),
Cristina Sust Farriol (Sant Nicolau, Sabadell),
Dani Samaniego Vidal (IES Guillem Catà, Manresa) i
Adrián Martínez Sanz (Nuestra Señora del Rosario, Barcelona), 101.25 punts
Carlos Ortiz Valcárcel (IES Pere Boïl, Manises),
Roberto Mengual Mengual (IES Enric Valor, Pego),
Oscar Rodríguez Del Río (CEPA Oriol Martorell, Barcelona),
Carmen Santegoeds Op Den Camp (IES Mediterrània, El Masnou) i
Alvaro Soria Cabello (IES Vicent Sos Baynat, Castelló), 101.0 punts
Joana Fraxanet Morales (IES Francesc Ribalta, Solsona) i
Guillem Bosch Massot (Aula Escola Europea, Barcelona), 100.75 punts
Carles López Bustins (IES Josep Brugulat, Banyoles), 100.5 punts
Gerard Pujadas Domenech (Casals-Gràcia, Manlleu) i
Román Sánchez Alonso (IES Jaume Balmes, Barcelona), 100.0 punts
Òscar Comino Trinidad (IES Manuel Blancafort, La Garriga), 99.75 punts
David Forns Bundó (IES Arquitecte Manuel Raspall, Cardedeu),
Víctor Gómez Martínez (IES Damià Campeny, Mataró) i
Gerard Erruz López (IES La Sedeta, Barcelona), 99.5 punts

Nil Garcia Moreno (Sagrada Família-Horta, Barcelona) i
Aniol Serra Juhé (IES Santa Eugènia, Girona), 98.75 punts
Daniel Carrillo Lampe (Viaró, Sant Cugat del Vallès),
Bernat Dolz Ripolles (IES Marius Torres, Lleida) i
Aina Feliu Cuberes (CEPA Oriol Martorell, Barcelona), 98.5 punts
Lluís Laguarda Sánchez (Escola Pia de Mataró, Mataró), 98.25 punts
Pablo Sonnaillon Colella (IES de Palamós, Palamós), 98.0 punts
Pablo Pires Núñez (IES Angeleta Ferrer i Sensat, Sant Cugat del Vallès)
i Pau Boix Capera (Thau, Barcelona), 97.5 punts
Albert Escofet Mata (Viaró, Sant Cugat del Vallès),
Feliu Saludes Piña (Escola Pia de Sabadell, Sabadell) i
Gerard Martí Juan (IES Narcís Oller, Valls), 97.25 punts

Qüestions de 3 punts. Solucions

1. D. 1800.

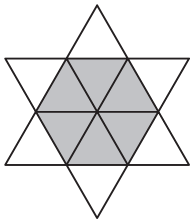
Els nombres donats són 2009, 11, 191, 1800, 209. És clar que l'únic que és parell és el quart.

2. C. 2.

Entre els quatre nois van ballar amb 8 noies. Entre les quatre noies han d'haver ballat, segons l'enunciat, amb 8 nois i, per tant, la quarta noia ha ballat amb 2 nois.

3. E. 18 cm.

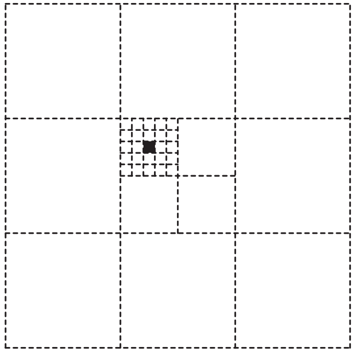
El perímetre de l'estrella està format per 12 costats de triangle equilàter. El perímetre de l'hexàgon gris el formen 6 costats de triangle i, per tant, serà la meitat del de l'estrella.



4. B. 20.

Com que $\dfrac{53-15}{2} = 19$ però hem de comptar també el nombre inicial són 20 els paquets que ha de repartir en Harry.

5. D. $\frac{1}{900}$.



La quadrícula petita està formada per 25 quadradets de la mida del negre. Per tant, com que en el quadrat central es podrien dibuixar 4 quadrícules com l'anterior, hi cabrien 100 quadradets. Com que en el quadrat sencer hi ha 9 quadrats com el central en total hi podria haver dibuixats 900 quadradets de la mida del quadradet negre.

6. D. 18.

Com que $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$ podem raonar que l'única manera de descompondre'l com a producte de quatre factors diferents resulta considerant el possible factor 1 i agrupant un 2 amb un 5, $100 = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10$. La suma d'aquests quatre factors és 18.

7. A. La meitat del nombre de gossos.

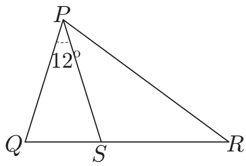
Com que cada gos té un nas, l'enunciat equival a dir que el nombre de potes dels gats és el doble que el nombre de gossos. És a dir el quàdruple del nombre de gats és igual al doble del nombre de gossos. I d'aquí es dedueix ràpidament la solució enunciada.

8. C. 5.

9 adults omplen tres quartes parts de l'ascensor. Per omplir la quarta part restant amb nins en podem posar $\frac{20}{4} = 5$.

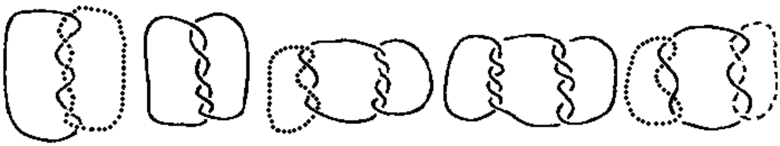
9. E. $54°$.

A partir de les dades de l'enunciat es dedueix que els triangles $\triangle PQS$ i $\triangle PSR$ són isòsceles. Per tant els angles en els vèrtexs Q i S del triangle $\triangle PQS$ mesuraran cada un $\dfrac{180° - 12°}{2} = 84°$. L'angle en S del $\triangle PSR$, com que és suplementari a un dels anteriors valdrà $180° - 84° = 96°$. Els altres dos angles del triangle isòsceles $\triangle PSR$ són igual i, doncs, $\widehat{SPR} = \dfrac{180° - 96°}{2} = 42°$ i, finalment, $\widehat{SPR} = \widehat{QPS} + \widehat{SPR} = 12° + 42° = 54°$.



10. A. I, III i V.

La figura mostra que en l'esquema I i en el III hi ha dos trossos de corda enllaçats i en el V, tres.



I II III IV V

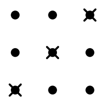
Qüestions de 4 punts. Solucions

11. B. 3.

Si mirem els nombres positius de l'1 al 10 observem que hi ha, només, l'1, el 2 i el 4. I no n'hi pot haver cap més perquè per als nombres $n, n \geq 10$, el fet de multiplicar n^2 per n segur que fa augmentar, si més no, una xifra.

12. C. 3.

Cal llevar-ne com a mínim tres, perquè a cada fila segur que cal treure'n 1. La figura adjunta mostra que podem llevar-ne tres sense que quedin tres punts alineats.



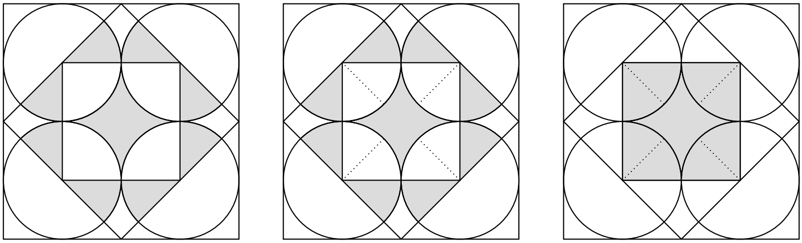
13. C. $45°$.

L'angle de $120°$ segur que és del triangle obtusangle i aleshores no ho pot ser el de $80°$. Com que ho és el de $80°$, l'angle de $10°$ no pot ser del triangle acutangle perquè esdevindria un triangle rectangle. Per tant l'angle de $55°$ sí que és del triangle acutangle. El tercer angle d'aquest triangle és de $180° - 80° - 55° = 45°$ i n'és l'angle més menut.

---

14. A. $\frac{1}{4}$.

Es pot veure que amb vuit sectors circulars de $45°$, iguals que els que estan acolorits exteriors al quadrat més menut, podem completar l'esmentat quadrat i així es veu que l'àrea acolorida és igual a la del quadrat central. Com que aquest quadrat té el costat igual a la meitat del quadrat gros es dedueix que la seva àrea n'és la quarta part.



---

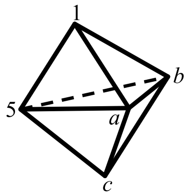
15. C. 13.

Si la primera persona de la cua digués la veritat totes les altres serien mentideres i aleshores, com que sabrien com és realment cadascú, totes les de la cua excepte la segona persona dirien que la del seu davant és veraç. Com que no diuen això deduim que la primera persona de la cua és mentidera.
Així doncs la segona persona de la cua és veraç.
Com que la tercera persona de la cua diu que la segona és mentidera, ella és mentidera. Amb la quarta persona passa com amb la segona; amb la cinquena com amb la tercera; etc.
Per tant les persones de la cua són alternativament mentidera, veraç, mentidera, ..., veraç i mentidera. En total hi ha 13 persones mentideres.

---

16. E. 17.

Els nombres de les cares superiors sumen $6+a$, $6+b$ i $1+a+b$. Si totes les cares han de sumar igual es dedueix en primer lloc que $a=b$ i tot seguit que $a=b=5$ i que la suma de cada cara superior és 11. Les cares inferiors sumen $10+c$ i, doncs, $c=1$. La suma dels cinc nombres és 17.



17. A. 1.

$T \cdot H \cdot R \cdot E \cdot E$ només pot tenir un valor, que és 0.
Efectivament, si s'ha de complir la igualtat

$$E \cdot I \cdot G \cdot H \cdot T = T \cdot W \cdot O \cdot F \cdot O \cdot U \cdot R$$

en la qual apareixen 10 lletres distintes, això significa que han de figurar-hi totes les xifres del 0 al 9. Com que la T apareix a tots dos costats es dedueix que $T=0$ perquè, altrament, un membre seria 0 i l'altre no ho podria ser. Per tant, si $T=0$ aleshores $T \cdot H \cdot R \cdot E \cdot E = 0$?

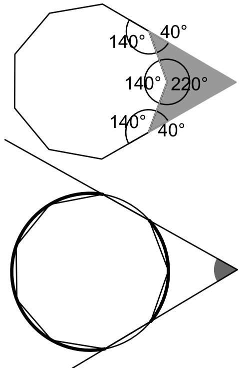
18. B. C **o** D.

A la casella just a la dreta de la B de la primera fila hi podrien anar, en principi, A o C però si es mira d'anar omplint caselles es veu que la C no hi pot anar. Si es van omplint caselles seguint les indicacions de l'enunciat es veu que a la primera fila hi ha d'anar necessàriament $ABABA$, a la segona $CDCDC$ i a la tercera $BABAB$. A la quarta fila hi pot anar $CDCDC$ o $DCDCD$.

A	B			
C	D			
		B		
B				

19. E. 60°.

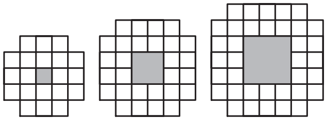
Els angles d'un eneàgon sumen $7 \cdot 180°$; cada angle d'un eneàgon regular és de $\dfrac{7 \cdot 180°}{9} = 140°$. Així podem deduir tres angles del quadrilàter acolorit, que són dos de 40° i un de 220°. Com que els angles d'un quadrilàter sumen 360° podem trobar la mesura de l'angle demanat.



També podem imaginar l'eneàgon regular inscrit en una circumferència i aleshores veiem que l'angle demanat és un angle exterior a la circumferència que abasta arcs de $2 \cdot 40°$ i $5 \cdot 40°$ i, per tant la seva mesura és $\dfrac{200° - 80°}{2} = 60°$.

20. D. 92.

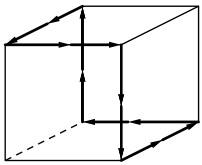
Si el quadrat gris és d'amplada n per envoltar-lo es necessiten $(n+4)^2 - 4 - n^2 = 4n+4+\cdot(n+2) = 8n+12$ quadrats unitaris blancs.
Per tant, per $n = 10$ se'n necessiten 92.



Qüestions de 5 punts. Solucions

21. C. 6.

La figura mostra l'itinerari que seguirem. És essencial la visió espacial de dreta/esquerra en el sentit de la marxa per l'exterior del cub.



22. E. 64.

Si el nombre comença per 1 o per 3 haurà d'anar seguit, alternativament, per un 2, un 1 o un 3, un 2 i així successivament. Cinc posicions fixes i cinc posicions amb dues possibilitats; això fa un total de $2^5 = 32$ nombres. Si imaginem que el nombre comença per 2 repetiríem l'explicació i trobaríem 32 nombres més. Així obtenim un total de 64 nombres.

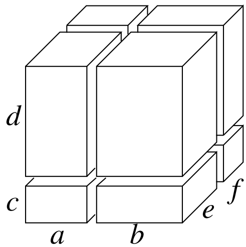
23. C. 2.

Si multipliquem el divisor més gran i el divisor més petit diferent de 1 d'un nombre (que és el divisor primer més petit) obtenim el nombre. En la situació de l'enunciat, si p és el divisor primer més petit del nombre, $45 \cdot p$ serà el divisor propi més gran i per tant el nombre que busquem serà $45 \cdot p^2$. Per aquest nombre p només podrà ser 2 o 3 perquè és múltiple de 3 i de 5. Així doncs els nombres que busquem són $45 \cdot 2^2 = 180$ i $45 \cdot 3^2 = 5 \cdot 3^4 = 405$.

---

24. B. 2 : 1.

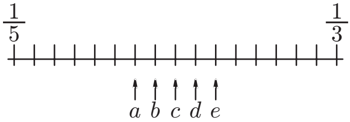
Podem observar que quan separem els vuit prismes de la dreta dels vuit de l'esquerra les noves cares que es generen componen per un costat una superfície igual a una cara del cub i per l'altre costat anàlogament. Semblantment succeeix quan separem els quatre prismes de dalt dels quatre de baix i també quan separem els quatre del davant dels quatre del darrere. En total, doncs, "neixen" cares que, entre totes, tenen una superfície igual a les 6 cares del cub. Per tant l'àrea total dels prismes petits serà el doble de l'àrea del cub.



Si a algú li agrada més calcular pot veure que, amb les lletres de la figura, l'àrea total del cub és $2(a+b)\cdot(e+f)+2(a+b)\cdot(c+d)+2(c+d)\cdot(e+f)$. Pel que fa als ortoedres petits, el que té dimensions b, e, c té àrea $2b\cdot e+2b\cdot c+2c\cdot e$, el que correspon a f, d, b té àrea $2f \cdot d + 2f \cdot b + 2d \cdot b$, i semblantment amb els altres sis prismes, d'arestes c, a, e un, b, f, c un altre, b, d, e un altre, f, d, c un altre, a, d, e un altre i finalment f, d, a. Si sumem les àrees de tots els prismes veurem que resulta exactament el doble de l'àrea del cub.

25. A. a.

Cada una de les divisions del segment de la figura



correspon a $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}{16}=\dfrac{1}{120}$. Per saber quantes divisions com aquesta hi ha des de $\dfrac{1}{5}$ fins a $\dfrac{1}{4}$ hem de dividir $\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{120}}=6$. Si mirem la figura veiem que la 6a divisió correspon a la lletra a.

---

26. B. 45.

Com que $44^2<2009$ haurem de provar com a mínim amb un quadrat de costat 45. Si observem que $45^2=2025$ tenim que un quadrat de costat 45 unitats es pot descompondre en 2025 quadradets unitaris. Si en aquesta descomposició susbtituïm dos conjunts de 3×3 quadradets per dos quadrats de 3 unitats de costat cada un, hem reduït en 16 el total de quadrats de la descomposició que restarà formada per 2009 quadrats de costat enter.

---

27. B. P, R, S.

Si un angle α d'un quadrilàter és còncau es compleix que la suma de les longituds dels dos costats que formen aquest angle és més petita que la suma de les longituds dels altres dos costats del quadrilàter.
Vegem què succeeix en el quadrilàter de l'enunciat.
Vèrtex P o vèrtex R: La suma de longituds dels costats que hi conflueixen, que és 4015, és igual en cada cas a la suma de les longituds dels altres dos. Els angles en P i R no poden ser còncaus.
Vèrtex Q: Longitud dels que hi conflueixen $2008+2006=4014$ és més petita que la suma de les altres dues longituds. L'angle en Q pot ser còncau.
Vèrtex S: En aquest cas la suma de longituds dels costats que formen l'angle, $2007+2009=4016$ és més gran que la suma dels altres dos, $2008+2006=4014$. L'angle en S no pot ser còncau.

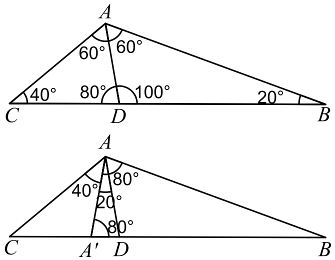
28. D. 40 **cm**^{2}.

L'àrea del quadrat és de 36 cm^2. L'enunciat ens diu que el 60% de l'àrea del triangle és igual que els $\dfrac{2}{3}$ de l'àrea del quadrat, és a dir 24. El nombre que el seu 60% és igual a 24 és $\dfrac{24}{0,6} = 40$.

29. D. 9.

Podem enllaçar, per exemple, la llista dels nombres parells positius amb la dels múltiples de 3 positius mitjançant el 6 i també la dels múltiples de 2 amb la dels de 5 mitjançant l'1 i així obtenim una llista de 9 nombres positius: 9, 3, 6, 2, 4, 8, 1, 10, 5. Si poséssim el 7 a la llista només el podríem enllaçar amb l'1 i ens quedarien per col·locar o bé els múltiples de 5 o bé els de 3. Per tant, posaríem menys nombres.

30. E. 2.



D és el peu de la bisectriu de l'angle $\angle A$. A la primera figura es mostren valors d'angles que es poden deduir directament de l'enunciat i del fet que els angles d'un triangle sumen 180°.
A la segona figura s'ha dibuixat un punt A' amb la condició que $BA = BA'$. La distància que es demana és igual a CA'. Com que el triangle BAA' es isòsceles es dedueix que els angles a la base són de 80°. Aleshores podem veure que el triangle $AA'D$ també és isòsceles, que l'angle en A d'aquest triangle és de 20° i que $AA' = AD = 2$. Per diferència de dos angles ja coneguts deduïm que l'angle en A del triangle ACA' és de 40° i, per tant, aquest triangle també és isòsceles i serà $CA' = AA' = 2$.

Cangur SCM 2009 Nivell 3

Qüestions de 3 punts

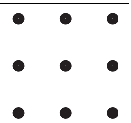
1. (*França*) Quin dels nombres següents és múltiple de 3?

A) 2009 B) $2+0+0+9$ C) 2^9 D) $200-9$ E) $(2+0)\cdot(0+9)$

2. (*Rússia*) Per quants nombres enters positius necessitem la mateixa quantitat de xifres per a escriure el seu quadrat que per a escriure el seu cub?

A) 0 B) 3 C) 4 D) 9 E) Una quantitat infinita

3. (*Bielorrússia*) Quin és el nombre mínim de punts que cal llevar de la figura de manera que no hi quedin tres punts alineats?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 7

4. (*Catalunya*) En una cursa popular han participat 2009 persones. El nombre de persones a les quals en Joan ha guanyat és justament el triple del nombre de participants que han arribat a la meta abans que en Joan. En quin lloc ha quedat classificat en Joan en aquesta cursa?

A) 503 B) 501 C) 500 D) 1503 E) 1507

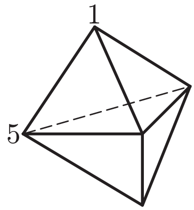
5. (*Xipre*) Quin és el valor de $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}$ de $\frac{5}{6}$ de $\frac{6}{7}$ de $\frac{7}{8}$ de $\frac{8}{9}$ de $\frac{9}{10}$ de 1000?

A) 250 B) 200 C) 150 D) 100 E) Un altre valor

6. (*Suècia*) S'ha compost una successió llarga de dígits escrivint el nombre 2009 repetidament 2009 vegades. La suma de les xifres senars de la successió que tenen immediatament darrere un dígit parell és igual a

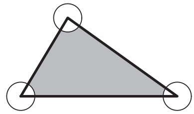
A) 2 B) 9 C) 4018 D) 18072 E) 18081

7. (*Mèxic*) La figura mostra un sòlid format per 6 cares triangulars. Hi ha un nombre a cada vèrtex. Per cada cara, consideram la suma dels tres nombres situats als vèrtexs de la cara. Si totes les sumes donen el mateix i dos dels nombres són 1 i 5 com es mostra a la figura, quina és la suma dels 5 nombres?



A) 9 B) 12 C) 14 D) 15 E) 17

8. (*Catalunya*) L'àrea del triangle del dibuix és 80 m^2 i el radi dels cercles centrats als vèrtexs és 2 m. Quant mesura, en m^2, l'àrea fosca?

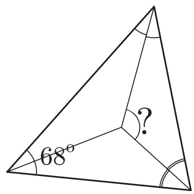


A) 76 B) $80 - 2\pi$ C) $40 - 4\pi$ D) $80 - \pi$ E) 78π

9. (*Eslovènia*) En Joan ha escrit una successió de nombres, de manera que cada nombre (a partir del tercer de la seqüència) és la suma dels dos nombres anteriors a ell. El quart nombre de la successió és 6 i el sisè nombre de la successió és 15. Quin és el setè nombre de la successió?

A) 9 B) 16 C) 21 D) 22 E) 24

10. (*Holanda*) Un triangle té un angle de 68°. Al dibuix apareixen les tres bisectrius del triangle. Quants graus té l'angle amb el signe d'interrogació?



A) 124° B) 126° C) 128° D) 132° E) 136°

Qüestions de 4 punts

11. (*França*) En cada control acadèmic que fa la Maria la puntuació pot ser 0, 1, 2, 3, 4 o 5 punts. Sabent que després d'haver realitzat 4 controls, la Maria té una mitjana de 4 punts, quina de les afirmacions següents no pot ser certa de cap de les maneres?

A) La Maria ha tret un 4 en tots els controls
B) La Maria ha tret un 3 precisament dues vegades
C) La Maria ha tret un 4 precisament dues vegades
D) La Maria ha tret un 1 justament una sola vegada
E) La Maria ha tret un 3 precisament tres vegades

12. (*França*) Els anells borromeans tenen la sorprenent propietat que no es poden separar sense trencar-ne cap però aleshores, quan ja se n'ha separat un, sigui quin sigui, els altres dos ja no queden enllaçats. Quina de les figures següents mostra uns anells borromeans?

A) B) C) D) E)

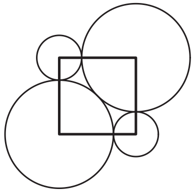
13. (*Ucraïna*) En una illa remota unes quantes persones sempre diuen la veritat i les altres persones menteixen sempre. 25 persones d'aquesta illa estan col·locades en fila índia. La primera persona de la cua diu que totes les altres són mentideres. Totes les altres persones de la cua diuen que la persona que tenen al davant és mentidera. Quantes persones mentideres hi ha a la cua?

A) 0 B) 12 C) 13 D) 24 E) És impossible saber-ho

14. (*Ucraïna*) Si definim $a \spadesuit b = ab + a + b$ i sabem que $3 \spadesuit 5 = 2 \spadesuit x$, quin és el valor de x?

A) 3 B) 6 C) 7 D) 10 E) 12

15. (*Holanda*) Hem dibuixat quatre cercles amb centres en els vèrtexs d'un quadrat; n'hi ha dos d'iguals més grossos i dos, també iguals entre ells, més menuts. Els cercles grossos són tangents entre ells i tangents a cada un dels cercles menuts. Quin és el resultat de dividir el radi dels cercles grossos pel radi dels cercles menuts?



A) $\dfrac{2}{9}$ B) $\sqrt{5}$ C) $0{,}8\pi$ D) 2,5 E) $1+\sqrt{2}$

---

16. (*Hongria*) Quants nombres enters positius n compleixen que el valor absolut de la diferència entre $\sqrt{n}$ i 10 és més petit que 1?

A) 38 B) 40 C) 19 D) 39 E) 41

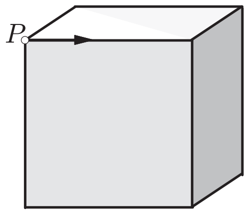
---

17. (*Lituània*) En Divendres (el company de Robinson Crusoe) va escriure, l'un al costat de l'altre, uns quants nombres enters positius diferents, tots ells més petits que 11. Robinson Crusoe se'ls va mirar i es va adonar amb satisfacció que en cada parella de nombres veïns un d'ells era divisible per l'altre. Com a màxim, quants nombres havia escrit en Divendres?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

---

18. (*Holanda*) Començant des del punt P, ens movem al llarg de les arestes per l'exterior del cub, seguint la direcció i el sentit que assenyala la fletxa. Al final de l'aresta hem de triar entre anar cap a l'esquerra o cap a la dreta. A la fi de la segona aresta hem de triar de nou, i així successivament. Elegim alternativament dreta i esquerra. Quantes arestes hem de recórrer per tornar al punt P per primera vegada?



A) 2 B) 4 C) 6 D) 9 E) 12

---

19. (*Ucraïna*) Quants nombres hi ha de deu xifres que s'escriguin fent servir només algunes de les xifres 1, 2 i 3 o totes tres, en els quals dues xifres contigües qualssevol difereixin d'1?

A) 4 B) 8 C) 16 D) 32 E) 64

---

20. (*Ucraïna*) Quants nombres enters positius N compleixen la propietat que en el conjunt dels seus divisors positius diferents de N i d'1, el nombre més gran d'aquest conjunt és igual a 45 vegades el nombre més petit del conjunt?

A) Cap B) 1 C) 2 D) Més de 2 E) No es pot determinar

Qüestions de 5 punts

21. (*Catalunya*) Col·loquem els enters de l'1 al 20 en la llista que teniu a continuació, de manera que la suma de dos qualssevol que estiguin junts ha de ser un nombre primer. Com podeu veure, alguns nombres han estat substituïts per lletres. A quin nombre correspon la lletra e?

$$20,\ a,\ 16,\ 15,\ 4,\ b,\ 12,\ c,\ 10,\ 7,\ 6,\ d,\ 2,\ 17,\ 14,\ 9,\ 8,\ 5,\ 18,\ e$$

A) 1 B) 3 C) 11 D) 13 E) 19

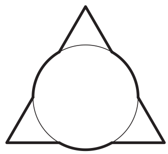
22. (*Rússia*) Quants zeros s'haurien d'escriure en comptes del signe $\star$ en el nombre decimal $1{,}\star 1$ per tal d'obtenir un nombre que sigui més petit que $\dfrac{2009}{2008}$ però més gran que $\dfrac{20009}{20008}$?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

23. (*Catalunya*) El petit Cangur té 2009 cubs de $1 \times 1 \times 1$ que ha col·locat formant un ortoedre. A més, té 2009 etiquetes 1×1 que ha d'emprar per a acolorir la superfície externa de l'ortoedre. El petit Cangur ho ha aconseguit, i li han sobrat etiquetes. Quantes etiquetes li han sobrat?

A) 763 B) 476 C) 49 D) 39 E) Més de 1000

24. (*Catalunya*) Un triangle equilàter de costat 3 i un cercle de radi 1 se superposen, de manera que els centres de les dues figures coincideixen. Quant mesura el perímetre de la figura que s'obté així?



A) $3+2\pi$ B) $6+\pi$ C) $9+\dfrac{\pi}{3}$ D) 3π E) $9+\pi$

25. (*Ucraïna*) Es col·loquen unes quantes taronges, melicotons, pomes i kiwis en fila, de manera que en algun lloc de la fila cada tipus de fruita es pot trobar al costat de cada un dels altres tipus de fruita diferents. Quin és el mínim nombre de fruites de la fila?

A) 8 B) 11 C) 4 D) 5 E) Aquesta situació és impossible

26. (*Hongria*) Quin és el primer enter n, per al qual el producte $(2^2-1)(3^2-1)(4^2-1)\cdots(n^2-1)$ és un quadrat perfecte?

A) 6 B) 8 C) 16 D) 27 E) Una altra resposta

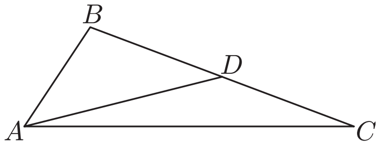
27. (*Polònia*) Si $a = 2^{25}$, $b = 8^8$ i $c = 3^{11}$, aleshores

A) $a < b < c$ B) $b < a < c$ C) $b < c < a$ D) $c < a < b$ E) $c < b < a$

28. (*Hongria*) En un terreny hi ha marcats uns eixos de coordenades que van, l'un d'est a oest i, l'altre, de nord a sud. El Cangur està situat a l'origen de coordenades. Pot saltar una unitat cap a l'est, o cap a l'oest, o cap al nord o cap al sud. A quants punts diferents del terreny pot arribar el Cangur si fa 10 salts successius en aquestes condicions?

A) 121 B) 100 C) 11 D) 400 E) 441

29. (*Polònia*) En el triangle ABC, el segment AD n'és una mitjana. L'angle $\widehat{ACB}$ és de 30° i l'angle $\widehat{ADB}$ és de 45°. Quina és la mesura de l'angle $\widehat{BAD}$?



A) 45° B) 30° C) 25° D) 20° E) 15°

30. (*Catalunya*) Diem que un nombre primer és *peculiar* si és un nombre primer d'una sola xifra o bé si és un nombre primer de més xifres, però aleshores el nombre que s'obté suprimint-ne la primera xifra també és un nombre primer peculiar i el mateix succeeix amb el nombre que s'obté suprimint-ne l'última xifra. Quants nombres enters positius hi ha que siguin primers peculiars?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 11

Premis i mencions

Primer premi

Xavier Fernández-Real Girona (IES Jaume Vicens Vives, Girona), 136.25 punts

Premis per al pòdium

David Magraner Villalba (IES Aamussafes, Almussafes), 128.25 punts
Gerard Neras Lozano (IES Jaume Vicens Vives, Girona), 122.5 punts

Premis de categoria A

Juan Vicente Folch Celades (IES Alfonso XIII, Vall d'Alba), 119.75 punts
Luis Alberto Moruno Calderon (IES Jaume Callís, Vic), 118.75 punts
Adrià González Esteve (Institució Cultural del C.I.C., Barcelona), 118.5 punts

Premi de categoria B

Pol Naranjo Barnet (IES Damià Campeny, Mataró), 116.25 punts
Alex Peman García (Aula Escola Europea, Barcelona), 116.0 punts
Guillem Alsina Oriol (IES Jaume Callís, Vic)
i Ramon Zuloaga Geli (IES Cap Norfeu, Roses), 113.75 punts

Premis de categoria C

Pere Planell Morell (Aula Escola Europea, Barcelona), 112.75 punts
Salvi Solà Martinell (IES Secretari Coloma, Barcelona), 111.25 punts
Rafael Murcia Hernández Herrera (Casp-Sagrat Cor de Jesús, Barcelona), 108.75 punts
Elisa Castañer Enseñat (Sant Pau, Barcelona), 107.5 punts

Premis de categoria D

Ivan Campà Sabater (IES Montserrat Roig, Terrassa), 106.75 punts
Judit Anton Francesch (Sagrat Cor de Jesús, Tarragona) i
Guillermo Girona San Miguel (IES Príncep de Viana, Barcelona), 105.75 punts
Bru Martinell Chicano (IES Jaume Vicens Vives, Girona), 105.0 punts

Mencions fins a l'1% de les millors puntuacions

Pablo Pastor Riquelme (IES Marius Torres, Lleida), 104.5 punts
Pau Amich Vidal (IES Jaume Vicens Vives, Girona), 103.75 punts
Marcel Llavero Pesquina (IES Narcís Xifra i Masmitjà, Girona) i
Mauricio Alva Hower (Sant Josep Obrer, L'Hospitalet), 103.5 punts
Joan Miret Minard (Casp-Sagrat Cor de Jesús, Barcelona), 102.75 punts
Bernat Padullés Castelló (IES Ernest Lluch, Barcelona), 102.5 punts
Clara Pérez Ràfols (Madres Concepcionistas, Barcelona), 102.25 punts
Agustín Bou Catalá (IES Vila-Roja, Almassora), 102.0 punts
Daniel De Córdoba Gil (Casp-Sagrat Cor de Jesús, Barcelona), 101.25 punts
Andrés Burgos Caminal (Joan Pelegrí, Barcelona), 101.0 punts
Anna Llopis Montserrat (Proa, Barcelona), 100.5 punts
Inés Ruíz Gemar (IES Pere Calders, Cerdanyola del Vallès), 100.0 punts
Bernat Martínez Bort (IES Alfonso XIII, Vall d'Alba), 99.25 punts
Alejandro Segarra Tamarit (IES Violant de Casalduch, Benicàssim)
Edgar Badia Guardiola (Infant Jesús, Barcelona) i
Eduard Ribas Fernández (Casp-Sagrat Cor de Jesús, Barcelona), 99.0 punts
Clara Hormigos Feliu (Escola Pia de Nostra Senyora, Barcelona), 98.25 punts
Olga Claramonte Bellmunt (IES Vila-Roja, Almassora) i
David Amorín García (IES Gabriel Ferrater i Soler, Reus), 98.0 punts
Samira Martínez Otelo (IES Pius Font i Quer, Manresa), 97.75 punts
David Codony Gisbert (Bienaventurada Virgen María, Barcelona) i
David Medel Pizarro (Joan Pelegrí, Barcelona), 97.25 punts
Georgina Ansaldo Giné (Institució Cultural del C.I.C., Barcelona), 97.0 punts
Bernardo Pérez Aznar (IES Antoni Martí i Franquès, Tarragona), 96.75 punts
Berta Bosch Vidal (IES Montserrat, Barcelona) i
Andreu Ferré Moragues (IES Antoni Martí i Franquès, Tarragona), 96.25 punts

Qüestions de 3 punts. Solucions

1. E. $(2+0)\cdot(0+9)$.

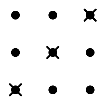
Els valors proposats són 2009, 11, 512, 191 i $(2+0)\cdot(0+9)=18$. L'últim és l'únic que és múltiple de 3. Si escau per al 2009 es pot recordar el criteri de divisibilitat per 3 i per al $2^9=512$ es pot dir que si multipliquem només uns quants 2 mai podem assolir un múltiple de 3.

2. B. 3.

Si mirem els nombres positius de l'1 al 10 observem que hi ha, només, l'1, el 2 i el 4. I no n'hi pot haver cap més perquè per als nombres $n, n \geq 10$, el fet de multiplicar n^2 per n segur que fa augmentar, si més no, una xifra.

3. C. 3.

Cal llevar-ne com a mínim tres, perquè a cada fila segur que cal suprimir-ne un. La figura adjunta mostra que podem llevar-ne tres sense que quedin tres punts alineats.



4. A. 503.

Si les 2008 persones que no són en Joan es divideixen en quatre parts, una d'aquestes parts, que tindrà $\frac{2008}{4}=502$ persones, correspon a aquelles que han arribat abans que en Joan. Per tant en Joan és el 503è.

És clar que aquest raonament es pot traduir molt bé a una equació. Si x representa el nombre de persones que han avançat a en Joan es compleix $x+1+3x=2009$. D'aquí es dedueix de seguida que $x=502$ i, doncs, en Joan és el 503è.

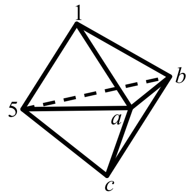
5. D. 100.

És $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{10}\cdot 1000$, expressió que, simplificada adequadament, es veu de seguida que és $\frac{1000}{10}=100$.

6. D. 18072.

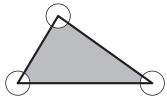
Les xifres senars que tenen al darrere una xifra parell són tots els 9 que apareixen excepte l'últim. La suma demanada és doncs $9 \cdot 2008 = 18072$

7. E. 17.



Els nombres de les cares superiors sumen $6+a$, $6+b$ i $1+a+b$. Si totes les cares han de sumar igual es dedueix en primer lloc que $a=b$ i tot seguit que $a=b=5$ i que la suma de cada cara superior és 11. Les cares inferiors sumen $10+c$ i, doncs, $c=1$. La suma dels cinc nombres és 17.

8. B. $80-2\pi$.

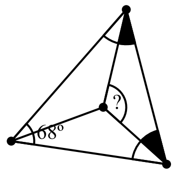


Com que els tres angles del triangle sumen 180°, aleshores els tres sectors circulars blancs interiors al triangle podem compondre un semicercle en un cercle de radi 2. L'àrea d'aquest semicercle és 2π, que cal restar a l'àrea del triangle per obtenir l'àrea demanada.

9. E. 24.

El cinquè nombre de la successió serà un 9 perquè $6+9=15$. El setè nombre de la successió és la suma del cinquè i el. sisè, $15+9=24$.

10. A. 124°.



Els dos angles no coneguts del triangle sumen

$$180° - 68° = 112°.$$

La meitat d'aquests angles, que es poden veure ombrejats a la figura, sumaran doncs $\dfrac{112°}{2} = 56°$. L'angle indicant amb el signe **?** juntament amb aquests dos han de sumar 180° perquè són els tres angles d'un triangle i, per tant, la mesura de **?** és $180° - 56° = 124°$.

Qüestions de 4 punts

11. E.

És clar que és possible que na Maria hagi tret un 4 en tots els controls. També pot haver tret un 3 precisament dues vegades, $3+3+5+5$, i també un 4 precisament dues vegades, $4+4+3+5$.

Si na Maria ha tret un 1 justament una sola vegada li falten 15 punts en els altres tres controls per tenir mitjana 4, que equival a 16 punts en total. Pot ser: $1+5+5+5$.

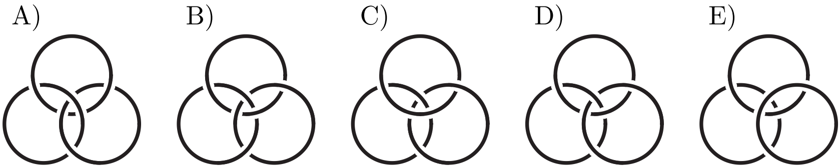
No pot ser que hagi tret un 3 precisament tres vegades perquè així sumaria 9 punts i n'hi faltarien 7 en el quart control, però la nota màxima és un 5.

12. B.

S'ha d'analitzar cas per cas i seguidament es comenta breument. Indicarem els anells com "el superior", "el de l'esquerra" i "el de la dreta".

En els casos A), C) i D) es pot veure que si trenquem l'anell superior, el de la dreta i el de l'esquerra encara queden enllaçats i per tant no es tracta d'anells borromeans. Si s'examina amb atenció la figura E) es veu que en realitat mostra tres anells no enllaçats.

La figura B) sí que representa tres anells borromeans. Vegeu que si trenquem l'anell superior i el separem queda el de l'esquerra tot ell per davant del de la dreta; si trenquem el de l'esquerra queda l'anell de la dreta per davant del superior; si trenquem el de la dreta queda el superior per davant del de l'esquerra.



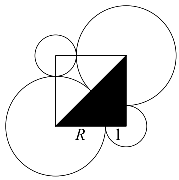
13. C. 13.

Si la primera persona de la cua digués la veritat totes les altres serien mentideres i aleshores, com que sabrien com és realment cadascú, totes les de la cua excepte la segona persona dirien que la del seu davant és veraç. Com que no diuen això deduim que la primera persona de la cua és mentidera.
Així doncs la segona persona de la cua és veraç.
Com que la tercera persona de la cua diu que la segona és mentidera, ella és mentidera. Amb la quarta persona passa com amb la segona; amb la cinquena com amb la tercera; etc.
Per tant les persones de la cua són alternativament mentidera, veraç, mentidera, ..., veraç i mentidera. En total hi ha 13 persones mentideres.

14. C. 7.

Si apliquem la definició veiem que $3 \spadesuit 5 = 23$ i que $2 \spadesuit x = 3x + 2$. Si ha de ser $3x + 2 = 23$ es dedueix de seguida que $x = 7$.

15. E. $1 + \sqrt{2}$.



Sense perdre generalitat podem suposar que el radi dels cercles menuts és 1 i aleshores la resposta del problema plantejat serà el radi R dels cercles grossos.
Si observem el triangle ombrejat a la figura veiem que és un triangle rectangle isòsceles que té com a mesura dels catets $1 + R$ i la hipotenusa és $2R$. El teorema de Pitàgores ens diu que ha de ser $2 \cdot (1 + R)^2 = (2R)^2$. Si resolem aquesta equació trobem una solució negativa, que no és vàlida per al problema, i l'altra, simplificada, és $1 + \sqrt{2}$.

16. D. 39.

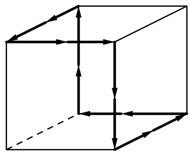
La condició de l'enunciat $|\sqrt{n} - 10| < 1$ equival a $-1 < \sqrt{n} - 10 < 1$ i si ara sumem 10 a cada terme, també equival a $9 < \sqrt{n} < 11$. Com que es tracta de nombres positius podem elevar les inequacions al quadrat i n'obtenim unes altres equivalents: $81 < n < 121$. Per tant els nombres que compleixen l'enunciat són els del conjunt $\{82, 83, ..., 119, 120\}$, és a dir un total de 39 nombres.

17. D. 9.

Podem enllaçar, per exemple, la llista dels nombres parells positius amb la dels múltiples de 3 positius mitjançant el 6 i també la dels múltiples de 2 amb la dels de 5 mitjançant l'1 i així obtenim una llista de 9 nombres positius: 9, 3, 6, 2, 4, 8, 1, 10, 5. Si poséssim el 7 a la llista només el podríem enllaçar amb l'1 i ens quedarien per col·locar o bé els múltiples de 5 o bé els de 3. Per tant, posaríem menys nombres.

18. C. 6.

La figura mostra l'itinerari que seguirem. És essencial la visió espacial de dreta/esquerra, tenint en compte en cada moment el sentit de la marxa per l'exterior del cub.



19. E. 64.

Si el nombre comença per 1 o per 3 haurà d'anar seguit, alternativament, per un 2, un 1 o un 3, un 2 i així successivament. Cinc posicions fixes i cinc posicions amb dues possibilitats; això fa un total de $2^5 = 32$ nombres. Si imaginem que el nombre comença per 2 repetiríem l'explicació i trobaríem 32 nombres més. Així obtenim un total de 64 nombres.

20. C. 2.

Si multipliquem el divisor més gran i el divisor més petit diferent de 1 d'un nombre (que és el divisor primer més petit) obtenim el nombre. Per tant el nombre que busquem serà $45 \cdot p^2$ on p és el divisor primer més petit del nombre. p només podrà ser 2 o 3 perquè el nombre és múltiple de 3 i de 5. Així doncs els nombres que busquem són $45 \cdot 2^2 = 180$ i $45 \cdot 3^2 = 5 \cdot 3^3 = 405$.

Qüestions de 5 punts

21. D. 13.

A la llista falten els nombres 1, 3, 11, 13 i 19. Aleshores podem observar que a només pot ser el 3; b i c només poden ser, tots dos, l'1 i el 19, que per tant hauran d'ocupar (indistintament) aquests dos llocs. Després veiem que, de l'11 i el 13 que són els que queden per col·locar d només pot ser l'11. Conclusió: e ha de ser el 13.

22. C. 3.

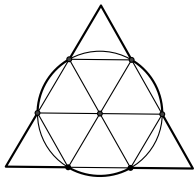
Escriurem N=1,⋆1. Si l'asterisc equival a n zeros és que $N = 1 + 10^{-(n+1)}$. Si s'ha de complir $\dfrac{20009}{20008} < N < \dfrac{2009}{2008}$, restant 1 a les desigualtats anteriors obtenim $\dfrac{1}{20008} < 10^{-(n+1)} < \dfrac{1}{2008}$ i ara, invertint les fraccions, $20008 > 10^{n+1} > 2008$. Veiem, doncs, que ha de ser $n + 1 = 4$ i, per tant, $n = 3$. Igualment ho podríem raonar imaginant que fem a mà la divisió de 2009 per 2008, que dóna un resultat $A >$ 1,0001. Semblantment 20009 dividit per 20008 dóna $B =$ 1,0000.... $<$ 1,0001 i així s'arriba a la mateixa conclusió.

23. A. 763.

Com que $2009 = 7^2 \cdot 41$, els ortoedres que pot haver format el Cangur tindran per dimensions $2009 \times 1 \times 1$ o bé $287 \times 7 \times 1$ o bé $41 \times 7 \times 7$. La superfície dels dos primers supera les 2009 unitats quadrades i, per tant, per aquests ortoedres faltarien etiquetes. La superfície de l'ortoedre de dimensions $41 \times 7 \times 7$ és $2 \cdot 7 \cdot 7 + 4 \cdot 41 \cdot 7 = 1246$ i per tant sobren $2009 - 1246 = 763$ etiquetes.

24. B. $6 + \pi$.

Si fem una rotació d'angle 60° amb centre de rotació el centre comú del triangle i del cercle la figura es transformarà en ella mateixa. Per aquesta raó els punts assenyalats sobre el perímetre de la figura es transformen cada un en el següent i els triangles auxiliars que s'han dibuixat són tots ells equilàters de costat 1. El perímetre de la figura està format per sis segments de longitud 1 i una longitud igual a un semicercle de radi 1, és a dir π.



25. A. 8.

Si col·loquem 8 fruites així TMPKTPMK es compleix la condició de l'enunciat i cada tipus de fruita es pot trobar al costat de qualsevol dels altres tipus. Així ja podem decidir l'opció de resposta perquè és clar que amb 4 no podem aconseguir que cada tipus estigui al costat de qualsevol altre i amb 5, tampoc, perquè hi ha d'haver posades les quatre fruites, per exemple TMPK, i aleshores sigui el que sigui el tipus de fruita X que afegim, cap de les situacions XTMPK, TXMPK, TMXPK, TMPXK o TMPKX no compleix la condició.

26. B. 8.

Si escrivim cada parèntesi com suma per diferència trobarem

$$(2+1)\cdot(2-1)\cdot(3+1)\cdot(3-1)\cdot(4+1)\cdot(4-1)\cdot(5+1)\cdot(5-1)\ldots$$

$2-1=1$ és un quadrat perfecte. Per altra banda cada factor $(k+1)$ és igual al factor $((k+2)-1)$ i quan es multipliquen donen un quadrat perfecte. Aleshores el nombre n que es demana serà el primer amb què poguem trobar factors encara no emparellats que multiplicats donin un quadrat perfecte. Ho aconseguim per $n=8$ que ens deixa sense emparellar els factors $(3-1), (7+1)$ i $(8+1)$.

---

27. E. $c<b<a$.

Observem que $c=3^{11}<4^{11}=2^{22}<b=8^8=(2^3)^8=2^{24}<a=2^{25}$.

---

28. A. 121.

Si indiquem amb n, s, e, o el nombre de vegades que el Cangur ha saltat respectivament cap al nord, cap al sud, cap a l'est o cap a l'oest haurà arribat al punt de coordenades $(e-o, n-s)$ on $e+o+n+s=10$. Podem escriure la suma de les coordenades d'aquest punt com $e-o+n-s=10-2(o+s)$ i deduïm que serà un nombre parell comprès entre -10 i 10, aquests dos valors inclosos i tots els intermedis factibles. Semblantment podríem raonar per a la diferència de les coordenades.

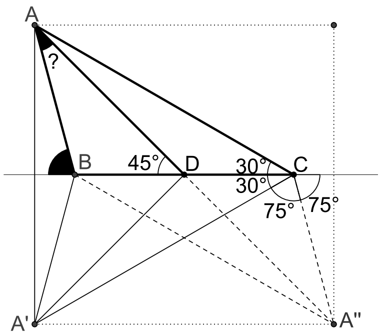
Per tant el Cangur pot arribar a qualsevol dels 121 punts d'intersecció de les rectes $x+y=j$ amb les rectes $y-x=k$ amb j, k en el conjunt

$$\{-10, -8, -6, ..., 0, ..., 6, 8, 10\}.$$

---

29. B. 30°.

Si fem una simetria del punt A respecte el costat BC trobem el punt A'. Si mirem l'angle de 45° veiem que queda dibuixat un triangle rectangle isòsceles ADA' i, si mirem l'angle de 30 observarem un triangle equilàter ACA'. Aleshores, si fem una simetria central del punt A respecte el punt D es forma un paral·lelogram $ABA"C$ de manera que $AA'A"$ són tres vèrtexs consecutius d'un quadrat. $A'A"C$ és un triangle isòsceles on l'angle en A' és de 30° (el que falta a l'angle del triangle equilàter per tenir un angle recte) i deduïm la mesura de 75° de l'angle en C d'aquest triangle i, comptant el que falta per a arribar a un angle pla, de l'altre angle de 75° que li és adjacent. Aquest angle és igual que l'angle acolorit a la figura exterior al triangle ABD, que és la suma dels dos angles del triangle ABD que no li són adjacents. Així deduïm que l'angle demanat és de 30°.



30. D. 9.

Els nombres primers peculiars d'una xifra són 2, 3, 5 i 7. Els de dues xifres hauran de ser nombres primers que tinguin com a primera i com a segona xifra una de les anteriors. Si els escrivim i ho comprovem veurem que només són 23, 37, 53 i 73. Els candidats a primers peculiars de tres xifres es construiran fent que les dues primeres xifres siguin un dels nombres anteriors i les dues últimes també. A priori podem pensar en 237, 373, 537 i 737. D'aquests només és primer 373.

Cangur SCM 2009 Nivell 4

Qüestions de 3 punts

1. (*Eslovàquia*) Hi ha 200 peixos en un aquari. L'1 % és de color blau i la resta és de color groc. Quants peixos de color groc hem de treure de l'aquari perquè el 2 % dels peixos que queden siguin de color blau?

A) 2 B) 4 C) 20 D) 50 E) 100

2. (*Regne Unit*) Quin és el nombre més gran?

A) $\sqrt{2}-\sqrt{1}$ B) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ C) $\sqrt{4}-\sqrt{3}$ D) $\sqrt{5}-\sqrt{4}$ E) $\sqrt{6}-\sqrt{5}$

3. (*Regne Unit*) Quants enters positius diferents n hi ha que compleixin que el nombre n^2+n sigui un nombre primer?

A) 0
B) 1
C) 2
D) N'hi ha un nombre finit però més gran que 2
E) N'hi ha un nombre infinit

4. (*Finlàndia*) Na Mari, en Ville i l'Ossi varen anar a un cafè. Cadascun d'ells va prendre tres tassons de suc, dos gelats i cinc croissants. Quina de les quantitats següents van pagar?

A) 39,20 € B) 38,20 € C) 37,20 € D) 36,20 € E) 35,20 €

5. (*Ucraïna*) En una illa remota unes quantes persones sempre diuen la veritat i les altres persones menteixen sempre. 25 persones d'aquesta illa estan col·locades en fila índia. La primera persona de la cua diu que totes les altres són mentideres. Totes les altres persones de la cua diuen que la persona que tenen al davant és mentidera. Quantes persones mentideres hi ha a la cua?

A) 0 B) 12 C) 13 D) 24 E) És impossible saber-ho

6. (*Eslovàquia*) Les circumferències f, de centre F i radi 13, i g, de centre G i radi 15, s'intersequen en els punts P i Q. La llargària del segment PQ és 24. Quina de les següents és la llargària del segment FG?

A) 2 B) 5 C) 9 D) 14 E) 18

---

7. (*Finlàndia*) Una caixa conté 2 mitjons blancs, 3 de rojos i 4 de blaus. La Isabel sap que un terç dels mitjons tenen un forat, però no sap de quin color són els mitjons foradats. Pren mitjons de la caixa a l'atzar amb l'esperança de prendre dos mitjons bons del mateix color. Quants mitjons ha de prendre per a estar absolutament segura de trobar un parell bo?

A) 2 B) 3 C) 6 D) 7 E) 8

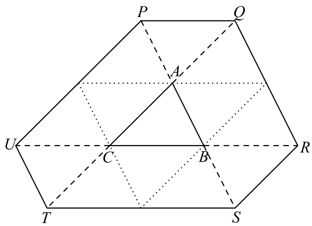
---

8. (*Catalunya*) Set persones s'han de desplaçar a un poble veí. Poden fer servir un cotxe de cinc places i una moto de dues places. De quantes maneres diferents poden distribuir-se en els dos vehicles, tot suposant que tots saben conduir? (No es té en consideració el seient exacte que cada persona ocupa al cotxe o bé a la moto.)

A) 21 B) 42 C) 120 D) 441 E) 5040

---

9. (*Mèxic*) Els costats del triangle ABC es prolonguen pels dos costats fins a arribar als punts P, Q, R, S, T i U, de manera que $|PA| = |AB| = |BS|$, $|TC| = |CA| = |AQ|$ i $|UC| = |CB| = |BR|$. Si l'àrea del triangle ABC és 1, quina és l'àrea de l'hexàgon $PQRSTU$?



A) 9 B) 10 C) 12 D) 13 E) No hi ha informació suficient

---

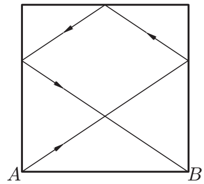
10. (*Mèxic*) Volem pintar els quadrats de la taula utilitzant els colors A, B, C i D, de tal manera que els quadrats veïns no tinguin el mateix color (quadrats que comparteixen un vèrtex es consideren veïns). Alguns dels quadrats ja han estat pintats amb els colors com es mostra. Quins són els possibles colors per al quadrat gris?

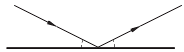
A	B			
C	D			
		B		
B				

A) A o B B) Només C C) Només D D) A, B, C o D E) C o D

Qüestions de 4 punts

11. (*Mèxic*) En un billar de forma quadrada de 2 metres de costat es tira una bola des de la cantonada A. Després de tocar tres costats, tal com indica la figura, acaba a la cantonada B. Quants metres recorre la bola? (Recorda que una bola rebota formant el mateix angle en sortir que en entrar, com es mostra a la figura de la dreta.)



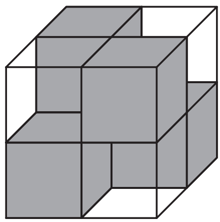


A) $2\sqrt{13}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ D) 7 E) 8

12. (*Ucraïna*) Quants nombres hi ha de deu xifres que s'escriguin fent servir només algunes de les xifres 1, 2 i 3 o totes tres, en els quals dues xifres contigües qualssevol difereixin d'1?

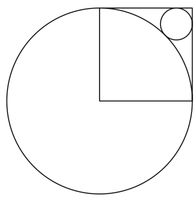
A) 16 B) 32 C) 64 D) 80 E) 100

13. (*Eslovàquia*) El cub de la figura està format per quatre cubs transparents i quatre cubs opacs. Els cubs opacs estan col·locats de tal manera que les sis vistes laterals són totalment opaques. Si formem un cub $3 \times 3 \times 3$ amb cubs transparents i opacs amb la mateixa propietat, quin és el mínim nombre de cubs opacs que necessitarem?



A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 18

14. (*Polònia*) El quadrat de la figura té els costats de longitud 1. Aleshores el radi del cercle menut és igual a

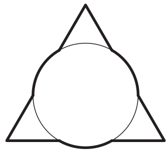


A) $\sqrt{2}-1$ B) $\dfrac{1}{4}$ C) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ D) $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ E) $(1-\sqrt{2})^2$

15. (*Sèrbia*) Quin és el darrer dígit del nombre $1^2 - 2^2 + \cdots - 2008^2 + 2009^2$?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

16. (*Catalunya*) Un triangle equilàter de costat 3 i un cercle de radi 1 se superposen de manera que els centres de les dues figures coincideixen. Quant mesura el perímetre de la figura que s'obté així?



A) $6 + \pi$ B) $3 + 2\pi$ C) $9 + \dfrac{\pi}{3}$ D) 3π E) $9 + \pi$

17. (*Txèquia*) Les gràfiques de les funcions reals f i g es troben a la figura. Quina és la relació entre f i g?

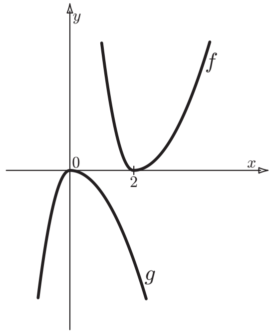
A) $g(x-2) = -f(x)$

B) $g(x) = f(x+2)$

C) $g(x) = -f(-x+2)$

D) $g(-x) = -f(-x+2)$

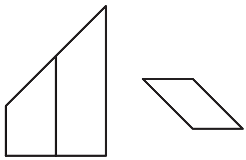
E) $g(2-x) = -f(x)$



18. (*Bielorrússia*) S'han proposat quatre problemes a cadascun dels 100 participants d'una olimpíada matemàtica. 90 concursants van resoldre el primer problema, 85 van resoldre el segon problema, 80 van resoldre el tercer problema i 70 van resoldre el quart problema. Quin és el mínim nombre possible de concursants que van resoldre els quatre problemes?

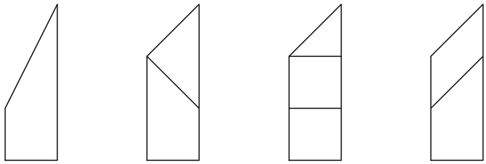
A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

19. (*Suïssa*) A la figura de la dreta es veuen la vista frontal i la vista des de dalt d'un sòlid geomètric. Quina de les figures següents descriu la vista des de l'esquerra?



Vista frontal   Vista superior

A)   B)   C)   D)   E) Cap de les anteriors



20. (*França*) Dos corredors donen voltes al voltant d'un estadi. Tots dos corren de manera continuada a una velocitat constant. A corre més ràpid que B. A triga 3 minuts a fer una volta. A i B comencen en el mateix moment. Passats 8 minuts, A passa B per primera vegada. Quant triga B a fer una volta?

A) 6 min   B) 8 min   C) 4 min 30 s   D) 4 min 20 s   E) 4 min 48 s

Qüestions de 5 punts

21. (*Polònia*) Hem construït una taula de 3×3. S'ha emplenat amb nombres de manera que la suma a cada fila, a cada columna i a cada diagonal sigui la mateixa. A la figura es mostren dos dels nombres que hem col·locat. Quin és el nombre en la posició a?

a		
		47
	63	

A) 16   B) 32   C) 55   D) 110   E) És impossible determinar-lo

22. (*Àustria*) Sigui Z la quantitat de nombres formats per 8 dígits diferents, cap dels quals no és 0. Quants d'aquests nombres són divisibles per 9?

A) $\frac{Z}{8}$ B) $\frac{Z}{3}$ C) $\frac{Z}{9}$ D) $\frac{8Z}{9}$ E) $\frac{7Z}{8}$

23. (*Catalunya*) Elegim a l'atzar tres vèrtexs diferents d'un polígon regular de 40 costats. Quina és la probabilitat que siguin els vèrtexs d'un triangle rectangle?

A) $\dfrac{1}{39}$ B) $\dfrac{3}{38}$ C) $\dfrac{1}{38}$ D) $\dfrac{1}{13}$ E) Cap de les anteriors

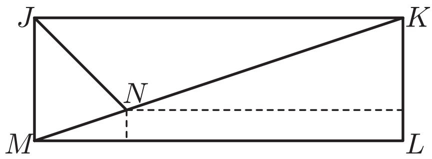
24. (*Bulgària*) Per a quants enters $n \geq 3$ hi ha un polígon convex de n costats els angles dels quals estiguin a la raó, $1 : 2 : \cdots : n$?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) Més de 5

25. (*Ucraïna*) 55 escolars van participar en una olimpíada matemàtica. En corregir-los, el jurat marcava amb un $+$ els problemes solucionats correctament, amb un $-$ els problemes resolts de manera incorrecta i amb un 0 si el participant no l'havia resolt. Després, es va observar que cap dels concursants van coincidir en el nombre de $+$ i $-$. Quin és el nombre mínim de problemes possible de l'olimpíada?

A) 6 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

26. (*França*) Al rectangle $JKLM$, la bisectriu de l'angle $\widehat{KJM}$ talla la diagonal KM en el punt N. Les distàncies de N als costats LM i KL són, respectivament, 1 i 8. Per tant, la longitud LM és:



A) $8 + 2\sqrt{2}$ B) $11 - \sqrt{2}$ C) 10 D) $8 + 3\sqrt{2}$ E) $11 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

27. (*Regne Unit*) Si $k = \dfrac{a}{b+c} = \dfrac{b}{c+a} = \dfrac{c}{a+b}$, quants valors possibles de k existeixen?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

28. *(Bulgària)* Els nombres 1, 2, 3, ..., 99 estan distribuïts en n grups d'acord amb les condicions següents:

- cada nombre pertany a un sol grup,
- almenys hi ha dos nombres a cada grup, i
- si dos nombres estan al mateix grup la seva suma no és divisible per 3.

El nombre n més petit que té aquesta propietat, és a dir que permet fer la distribució tal com s'ha indicat és:

A) 3 B) 9 C) 33 D) 34 E) 66

---

29. *(Mèxic)* La Susana i les seves tres germanes van al teatre. Tenen una llotja amb quatre seients. La Susana i dues de les seves germanes arriben més d'hora i ocupen tres dels quatre seients a l'atzar. Quina és la probabilitat que la Susana hagi de canviar de seient si en arribar la Maria, la germana petita, aquesta insisteix a ocupar el seient que tenia assignat i també insisteixen a fer-ho qualssevol de les germanes que s'hagin hagut d'aixecar a causa d'això?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{6}$

---

30. *(França)* La successió de nombres enters a_n està definida de la manera següent: $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_{n+2} = a_n + (a_{n+1})^2$ per $n \geq 0$. El residu de la divisió de a_{2009} per 7 és:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 5 E) 6

Premis i mencions

Primer premi

Ivan Geffner Fuenmayor (IES Maragall, Barcelona), 110.0 punts

Premis per al pòdium

ex-aequo, Alejandro De Miquel Bleier (Fundación Escuela Suiza, Barcelona) i Joshua Solaní Núñez (IES Almatà, Balaguer), 103.75 punts

Premis de categoria A

Juan Antonio Puig Ferré (IES Prof. Manuel Broseta, Banyeres de Mariola), 101.25 punts
Andreu Mayo Casademont (IES Jaume Vicens Vives, Girona), 100.0 punts
Sergi Picard Armada (IES Samuel Gili i Gaya, Lleida), 99.0 punts

Premi de categoria B

Víctor Cancer Castillo (IES Pere Calders, Cerdanyola del Vallès), 98.5 punts
Víctor Codony Domènech (Aula Escola Europea, Barcelona), 97.5 punts
Carlos Ruíz Carmona (IES Salvador Espriu, Barcelona), 96.75 punts

Premis de categoria C

Roger Mont Arnal (IES Gregori Maians, Oliva), 96.25 punts
Ferran Brosa Planella (IES La Garrotxa, Olot), 93.75 punts
Lluc Pont Rojas (Escola Pia de Nostra Senyora, Barcelona), 93.25 punts

Premis de categoria D

Jorge Valiente Jorge (IES Can Planas, Barberà del Vallès), 92.5 punts
María Gavilà Lloret (IES La Vereda, La Pobla de Vallbona), 92.0 punts
Arnau Duran Ferrero (IES Santiago Sobrequés i Vidal, Girona), 87.5 punts
Xavier Centelles Soler (Aula Escola Europea, Barcelona), 87.25 punts

Mencions fins a l'1% de les millors puntuacions

Guillem Rufian Torrell (IES Jaume I, Salou), 87.0 punts
Albert Domínguez Martínez (Escola Pia de Mataró, Mataró), 86.25 punts
Safae Lakzaini (IES Maragall, Barcelona), 86.0 punts
Cristian Andrés Rodríguez Hernández (IES Dr. Puigvert, Barcelona)
i Rami Lukata Shatali (IES Maragall, Barcelona), 85.0 punts
Oscar Santegoeds (Hamelín-Internacional Laie, Alella), 84.75 punts
Beatriz Corberó Molina (Aula Escola Europea, Barcelona), 84.25 punts
Xavier Vives Jaume (IES Angeleta Ferrer i Sensat, Sant Cugat del Vallès), 84.0 punts.

Qüestions de 3 punts. Solucions

1. E. 100.
Si l'1% de 200 peixos són blaus, és que hi ha 2 peixos blaus. Perquè representin el 2% del total, han de quedar 100 peixos a l'aquari. Per tant n'haurem de treure 100 peixos grocs.

2. A. $\sqrt{2} - \sqrt{1}$.
Podem veure que $\sqrt{2} - \sqrt{1} > \sqrt{3} - \sqrt{2}$ perquè aquesta desigualtat equival a $2\sqrt{2} > 1 + \sqrt{3}$ i, com que es tracta de nombres positius, aquesta equival a la que resulta d'elevar al quadrat els dos membres, és a dir a $8 > 4 + 2\sqrt{3}$, cosa que és certa perquè sabem que $\sqrt{3} < 2$. Semblantment podríem raonar que el nombre de l'opció B) de resposta és més gran que el C), aquest que el D) i aquest que el que tenim a l'opció E).
És interessant raonar-ho en general. Tenim

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Veiem, doncs, que la diferència $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ disminueix a mesura que n augmenta.

3. B. 1.
Com que $n^2 + n = n \cdot (n+1)$, aquest nombre només podrà ser primer quan $n = 1$.

4. C. 37,20 €.
Si cada una de les tres persones va prendre el mateix, aleshores la quantitat total que van pagar dividida per 3 ha de donar un valor exacte d'euros i cèntims. Podeu recordar el criteri de divisibilitat per 3 i veureu que l'única resposta que el compleix és 37,20 €. Cada persona haurà pagat $\frac{37,20}{3} = 12,40$ €.

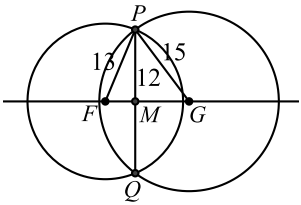
5. C. 13.

Si la primera persona de la cua digués la veritat totes les altres serien mentideres i aleshores, com que sabrien com és realment cadascú, totes les de la cua excepte la segona persona dirien que la del seu davant és veraç. Com que no diuen això deduim que la primera persona de la cua és mentidera.
Així doncs la segona persona de la cua és veraç.
Com que la tercera persona de la cua diu que la segona és mentidera, ella és mentidera. Amb la quarta persona passa com amb la segona; amb la cinquena com amb la tercera; etc.
Per tant les persones de la cua són alternativament mentidera, veraç, mentidera, ..., veraç i mentidera. En total hi ha 13 persones mentideres.

---

6. D. 14.

Si M és el punt mitjà del segment PQ es determinen dos triangles rectangles $\triangle FPM$ i $\triangle GPM$. Si apliquem el teorema de Pitàgores a aquests dos triangles es veu de seguida que $FM = 5$ i $MG = 9$. Per tant la distància demanada és 14.



---

7. D. 7.

A la caixa hi ha tres mitjons foradats. En el cas general, si només traiem 6 mitjons podrien ser els tres foradats i els altres tres de tres colors diferents. En canvi, si en traiem 7, en el pitjor del casos n'hi ha tres de foradats, però en queden 4 que només poden ser de tres colors, i algun color es repetirà.
En cas que els dos mitjons blancs estiguessin foradats n'hi hauria prou traient 6 mitjons però l'enunciat demana d'estudiar el problema sense cap condició.

---

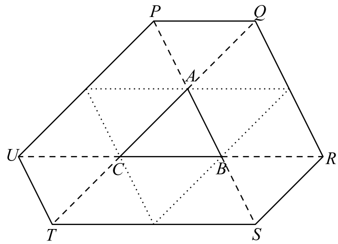
8. A. 21.

Tal com es planteja l'enunciat només cal triar quines 2 persones del conjunt de 7 aniran en moto. Aquesta tria es pot fer de $\binom{7}{2} = 21$ maneres.

---

9. D. 13.

Si tracem paral·leles per A, B i C respectivament a PQ, RS i TU, la figura queda dividida en 13 triangles que tenen tots la mateixa àrea.



10. E. C **o** D.

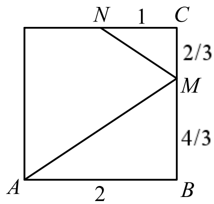
A la casella just a la dreta de la B de la primera fila hi podrien anar, en principi, A o C però si es mira d'anar omplint caselles es veu que la C no hi pot anar. Si es van omplint caselles seguint les indicacions de l'enunciat es veu que a la primera fila hi ha d'anar necessàriament $ABABA$, a la segona $CDCDC$ i a la tercera $BABAB$. A la quarta fila hi pot anar $CDCDC$ o $DCDCD$.

A	B			
C	D			
		B		
B				

Qüestions de 4 punts. Solucions

11. A. $2\sqrt{13}$.

Els triangles $\triangle ABM$ i $\triangle NCM$ són triangles rectangles semblants perquè tenen un angle agut igual (l'angle de rebot en la banda). Com que $AB = 2$ i $CN = 1$ també serà $BM = 2 \cdot MC$ i, per tant com que $BM + MC = 2$ tenim $BM = 4/3$ i $MC = 1/3$. La suma de les hipotenuses d'aquests dos triangles rectangles és la meitat de la trajectòria que estudiem. Si en calculem la longitud mitjançant el teorema de Pitàgores arribem a la solució indicada.

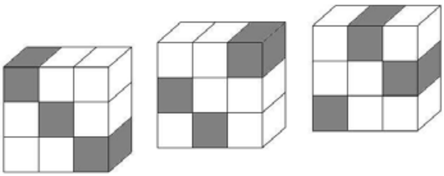


12. C. 64.

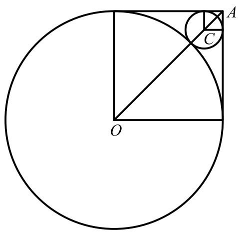
Si el nombre comença per 1 o per 3 haurà d'anar seguit, alternativament, per un 2, un 1 o un 3, un 2 i així successivament. Cinc posicions fixes i cinc posicions amb dues possibilitats; això fa un total de $2^5 = 32$ nombres. Si imaginem que el nombre comença per 2 repetiríem l'explicació i trobaríem 32 nombres més. Així obtenim un total de 64 nombres.

13. B. 9.

És clar que caldrà un mínim de 9 cubs opacs; altrament no és possible fer opaques totes les vistes. Amb 9 cubs opacs es pot fer el que es demana situant-los d'acord amb els esquemes següents que mostren respectivament la cara del davant del cub $3 \times 3 \times 3$, la secció central i la cara del darrere.



14. E. $(1 - \sqrt{2})^2$.



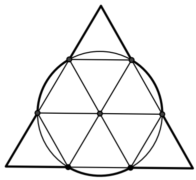
Si O és el centre del cercle gran, C el centre del cercle petit, i A el vèrtex exterior del quadrat, aleshores es pot veure que OA és igual al radi del cercle gran, que té longitud 1, més el radi r del cercle petit, més la diagonal del quadrat petit que es forma fent paral·leles des de C als costats del quadrat. Com que el costat d'aquest quadrat petit és r la diagonal mesura $r\sqrt{2}$. A partir de $OA = \sqrt{2} = 1 + r + r\sqrt{2}$ obtenim $r = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ expressió que, racionalitzada, ens dóna $r = (\sqrt{2}-1)^2$, que coincideix amb la resposta E.

15. E. 5.

Com que la suma de tots els quadrats dels nombres acabats en 2, en 4, en 6 i en 8, és a dir, els que es resten, acaba en $4+6+6+4$ o sigui en 0, busquem l'última xifra de la suma dels sumands positius. La suma dels quadrats d'un nombre acabat en 1, d'un nombre acabat en 3, d'un nombre acabat en 5, d'un nombre acabat en 7 i d'un nombre acabat en 9 acaba en $1+9+5+9+1$ és a dir en 5. Com que per arribar des de 1^2 a 2009^2 trobarem un nombre imparell de coleccions com la que acabem de comentar, l'última xifra demanada serà un 5.

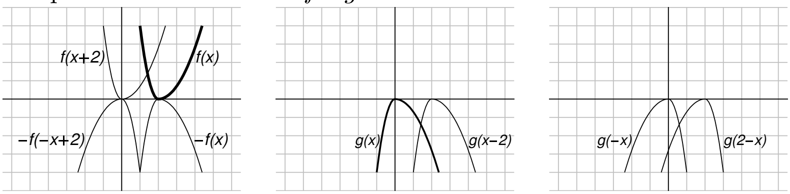
16. A. $6+\pi$.

Si fem una rotació d'angle 60° amb centre de rotació el centre comú del triangle i del cercle la figura es transformarà en ella mateixa. Per aquesta raó els punts assenyalats sobre el perímetre de la figura es transformen cada un en el següent i els triangles auxiliars que s'han dibuixat són tots ells equilàters de costat 1. El perímetre de la figura està format per sis segments de longitud 1 i una longitud igual a un semicercle de radi 1, és a dir π.



17. A o D.

Les figures mostren totes les funcions que apareixen a les opcions de resposta. És interessant que cadascú raoni com es pot deduir quina és la forma de cada una a partir de les funcions f i g inicials.



Es pot veure que hi ha dues opcions de resposta correctes $g(x-2)=-f(x)$ i $g(-x)=-f(-x+2)$.

18. D. 25.

Com que 10 concursants han fallat el primer problema, 15 el segon, 20 el tercer i 30 el quart, com a màxim han fallat algun problema $10+15+20+30 = 75$ persones. Per tant com a mínim hauran resolt correctament tots els problemes $100 - 75 = 25$ persones.

19. D.

Una acurada anàlisi espacial de les figures mostra que la resposta correcta és la D). Podem proposar a les persones que llegeixen aquest comentari que facin un retallable i mirin de construir la figura. Ben segur que això ajuda a assolir una millor visió de les figures geomètriques de tres dimensions.

20. E. 4 min 48 s.

A ha fet en 8 minuts 2 voltes més 2/3 de volta. Es podria pensar que en aquest mateix temps B ha fet 2/3 de volta però no és així perquè aleshores A ja l'hauria atrapat abans. Per tant B ha fet en els 8 minuts 1 volta més 2/3 de volta, és a dir 5/3 de volta. Per tant farà una volta en 24/5 de minut, que correspon a la resposta indicada.

Qüestions de 5 punts. Solucions

21. C. 55.

a		
		47
	63	

Indico com c el valor de la casella central i com S la suma comuna. Aleshores els nombres de les caselles de sobre de la c i de l'esquerra de la c seran $S - 63 - c$ i $S - 47 - c$. Els valors dels dos extrems de la diagonal secundària seran $63 + c - a$ i $47 + c - a$ i així ja puc saber el número de baix a la dreta, que és $S - 110 - c + a$. Aleshores si miro la diagonal principal s'ha de complir $(S - 110 - c + a) + c + a = S$. I ja puc obtenir el valor de a.

22. C. $\dfrac{Z}{9}$.

Com que $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$, que és múltiple de 9, l'única manera de trobar un nombre amb 8 dígits diferents que sigui múltiple de 9 serà imposar que estigui format pels dígits $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Com que dels Z nombres de l'enunciat resulta que a $Z/9$ "els falta" l'1, a $Z/9$ "els falta" el 2, i així successivament, també són $Z/9$ els nombres formats sense fer servir el 9.

---

23. D. $\dfrac{1}{13}$.

El nombre total de triangles que podem definir escollint-ne els tres vèrtexs entre els d'un polígon regular de 40 costats és $\binom{40}{3} = 9880$. Imaginem ara aquest polígon inscrit en una circumferència. Com que un angle recte inscrit en una circumferència ha de comprendre un angle de 180° aleshores els dos punts que determinin la hipotenusa del triangle rectangle hauran de ser els extrems d'un diàmetre i l'altre vèrtex podrà ser qualsevol dels altres punts. Per triar un diàmetre tenim 20 possibilitats, cada una de les quals es combina amb 38 possibilitats per triar el vèrtex de l'angle recte. Per tant, la probabilitat demanada és $\dfrac{20 \cdot 38}{9880} = \dfrac{1}{13}$.

---

24. B. 2.

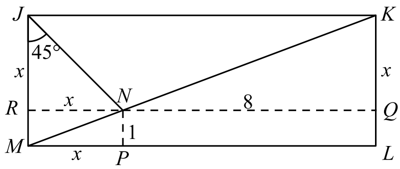
Els angles seran $a, 2a, 3a, ..., n \cdot a$ per a un cert valor de l'angle a. Ara bé, els angles han de sumar $a + 2a + 3a + ... + n \cdot a = (n-2) \cdot 180°$ i això és $a \cdot \dfrac{1+n}{2} \cdot n = (n-2) \cdot 180°$. D'aquí podem aillar el valor de l'angle més gran del polígon $n \cdot a = \dfrac{(n-2) \cdot 360°}{n+1}$. Perquè el polígon sigui convex aquest angle ha de ser més petit que 180°. Si ho imposem i aillem n trobem que ha de ser $n < 5$ i, per tant, només es pot complir l'enunciat per a un triangle (angles de 30°, 60° i 90°) i per a un quadrilàter (angles de 36°, 72°, 108° i 144°).

25. B. 9.

Perquè es compleixi l'enunciat podem trobar un participant que tingui tot 0, és a dir que no hagi presentat resposta a cap problema; dos participants que tinguin un 0 en tots els problemes menys en un (un tindrà un $+$ i l'altre un $-$); 3 participants que tinguin tot 0 excepte en dos problemes (com que no ens interessa res més que la qualitat de les respostes i no a quin problema corresponguin, les possibilitats a considerar són $++$, $+-$ i $--$); semblantment poden haver-hi 4 participants amb tot 0 excepte en 3 problemes (possibilitats $+++$, $++-$, $+--$,$---$); i així successivament fins a 10 participants que poden tenir diferents nombre de $+$ i $-$ amb 9 problemes contestats. Com que $1+2+3+...+10=55$ deduim la resposta indicada.

26. A. $8+2\sqrt{2}$.

Com que la bisectriu de l'angle en J que indica l'enunciat determina angles de 45° amb els costats del rectangle, el triangle $\triangle JRN$ és un triangle rectangle isòsceles.
Per això totes les distàncies marcades amb x a la figura són iguals.



Aleshores, com que els triangles $\triangle MPN$ i $\triangle NQK$ són semblants es dedueix que $\dfrac{1}{x}=\dfrac{x}{8}$ i d'ací $x^2=8$ és a dir $x=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

27. B. 2.

Si opero a partir de $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{a+c}$ obtinc $a^2+a\cdot c=b\cdot c+b^2$ i d'aquí arribo a $(a-b)\cdot(a+b)=c\cdot(b-a)$. Aquesta igualtat només es pot complir si $a-b=0$ o si $c=-(a+b)$.
Semblantment, a partir de $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{c}{a+b}$ arribem a $(a-c)\cdot(a+c)=b\cdot(c-a)$ i, per tant, ha de ser $a-c=0$ o $b=-(a+c)$.
Si estudiem totes les possibilitats veurem que només pot ser $a=b=c$ i aleshores $k=\dfrac{c}{a+b}=1/2$ o bé $c=-(a+b)$, que equival a $b=-(a+c)$, i aleshores $k=\dfrac{c}{a+b}=-1$.

28. C. 33.

Dos múltiples de 3 no poden estar junts. Com que n'hi ha 33, necessitarem, com a mínim, 33 grups. I amb 33 grups ja podem fer la distribució que proposa l'enunciat, posant a cada grup un múltiple de tres i repartint els nombres que són de la forma $3j + 1$ en 16 grups i els nombres que són de la forma $3k + 2$ en els altres 17 grups, per exemple, però sense barrejar en cap grup un nombre del tipus $3j + 1$ amb un nombre del tipus $3k + 2$.

29. A. $\frac{1}{2}$.

Si imaginem les 24 possibilitats perquè s'asseguin la Susanna i les dues germanes que han arribat d'hora i deixin una cadira buida veuríem que en 12 d'aquestes situacions la Susanna ha de canviar de cadira. Aquestes situacions són totes aquelles en què la cadira de la Susanna és la que havia quedat lliure (6 casos), aquelles en què la Susanna seu a la cadira de la Maria i el seu seient està ocupat (4 casos més) i, finalment, els dos casos en què la cadira de la Maria està ocupada per una germana i la Susanna seu justament a la cadira d'aquesta germana (2 casos més). En total 12 casos favorables al que es demana d'un total de 24 casos possibles donen una probabilitat $\frac{1}{2}$

30. B. 1.

Si el residu de la divisió de A per 7 és a i el residu de la divisió de B per 7 és b, aleshores el residu de la divisió de $A + B^2$ per 7 és el mateix que el residu de la divisió de $a + b^2$ per 7. Per comprovar aquesta propietat basta escriure $A = a + 7j$, $B = b + 7k$ i veure que $A + B^2$ es pot escriure com $a + b^2+$ un múltiple de 7.

Vist això en tindrem prou construint la successió de residus corresponent a l'enunciat, que s'observa que segueix la cadència 1, 2, 5, 6, 6, 0, 6, 1, 0, 1 i successivament es van repetint 1, 2, 5, 6, 6, 0, 6, 1, 0, 1. Com que el primer terme de la successió s'ha indicat com a_0, el terme a_{2009} correspondrà a l'últim 1 d'un d'aquests grups.

Una publicació de la Societat Catalana de Matemàtiques

Filial de l'Institut d'Estudis Catalans

Barcelona. Maig 2009

SOCIETAT CATALANA DE MATEMÀTIQUES · I · E · C ·